

Trabajo de Fin de Grado

Grado en Ingeniería Aeroespacial

Estudio de la estabilidad del Levitron® frente a perturbaciones en la posición

Autor: Ricardo Martínez García

Tutor: Antonio de la Cruz González Fernández

Dep. Física Aplicada III
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2017



Trabajo de Fin de Grado
Grado en Ingeniería Aeroespacial

Estudio de la estabilidad del Levitron® frente a perturbaciones en la posición

Autor:

Ricardo Martínez García

Tutor:

Antonio de la Cruz González Fernandez

Profesor titular

Dep. de Física Aplicada III
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2017

Trabajo de Fin de Grado: Estudio de la estabilidad del Levitron® frente a perturbaciones en la posición

Autor: Ricardo Martínez García

Tutor: Antonio de la Cruz González Fernández

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2017

El Secretario del Tribunal

Agradecimientos

La finalización de este trabajo supone un punto de inflexión en mi vida, tanto en el ámbito académico como en el personal. Han sido cuatro años magníficos y muy intensos, llenos de experiencias, cambios continuos y sobre todo, días y noches de duro trabajo. Es duro pararse un momento para echar la vista a atrás y reflexionar sobre quién soy hoy, y quién era el primer día que entré en esta escuela. Ahora, es momento de aprovechar todo lo aprendido en los estudios en esta escuela, y aventurarse en una nueva etapa, académica y profesional.

Me gustaría dedicar unas líneas para agradecer a todos aquellos que han hecho posible que llegue hasta aquí, y de la satisfacción que ello supone. En primer lugar, gracias a mi familia, quienes confiaban en mi desde el primer momento, me apoyaron y me seguirán apoyando por siempre. Gracias a mis amigos, quienes creían en mi incondicionalmente, y me aportaron su inmejorable compañía en todas esas noches y días de descanso cuando de verdad lo necesitaba. Gracias a mis compañeros de la carrera, con quienes he compartido todos esos momentos de alegría y, también, sufrimiento que no habría sido posible de superar sin su apoyo.

Por último, pero no menos importante, me gustaría agradecer en especial a mi tutor Antonio González, quién consiguió transmitirme el gran interés por la materia desde el primer momento. Este trabajo nunca hubiera sido posible sin su enorme implicación y conocimientos,

Ricardo Martínez García
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Sevilla, 2017

Resumen

El objetivo de este trabajo es el de analizar la dinámica del juguete comercial basado en una peonza que levita, el Levitron[®], y determinar las condiciones en las que se puede dar la levitación estable. Primeramente, se introducirá a la temática con una breve reseña histórica y una descripción general del sistema. Se enunciará el Teorema de Earnshaw, y se analizará en detalle en que casos no es aplicable, siendo el Levitron[®] uno de ellos. Posteriormente se definirá el modelado del sistema de la peonza y la base imantada, realizando una serie de hipótesis y simplificaciones, para los posteriores desarrollos matemáticos. En el capítulo 3 se estudiará la dinámica del sistema, a través de las ecuaciones de la mecánica clásica vectorial hasta llegar al sistema de ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento. A continuación, se linearizarán las ecuaciones en torno a un punto de equilibrio y se estudiará la región de estabilidad lineal del sistema y sus frecuencias naturales. Una vez estudiado el sistema lineal simplificado, se pasará a resolver numéricamente el sistema completo, variando los diferentes parámetros y condiciones iniciales. Se observará la influencia de los parámetros en las trayectorias y se definirán los límites de estabilidad no lineal de manera numérica. Por último, se dedicará un último capítulo para discutir los resultados y proponer unas posibles líneas de trabajo futuras.

Abstract

The aim of this project is to analyse the dynamics of the commercial spin-based levitating top, Levitron® , and to determine the conditions that allow the stable levitation. Firstly, the topic will be introduced with a brief historical overview and a general description of the system. Earnshaw's theorem will be discussed in detail, in order to determine in which cases does not apply, being the Levitron® one those. Following, the mathematical model of the top and the magnetic base will be defined, making a series of hypotheses and symplifications in order to ease the following mathematical formulations. In chapter 3 the differential equations of motion for the six degrees of freedom model are obtained, using the formulation of the vectorial classical dynamics. These equations are linearized at a given metastable equilibrium point, in order to study the linear stability of the system and its natural frequencies. Once the linear system has been studied, the complete system is solved numerically, varying the parameters and the initial conditions that define it. Thus, the influence of this parameters in the trajectory is observed and the non-linear boundaries of stability are calculated numerically. Finally, a last chapter is dedicated to summarize the results obtained in the analysis, and to propose possible future additions to this theory.

ÍNDICE

Agradecimientos	i
Resumen	ii
Abstract	iii
Índice	iv
Índice de Tablas	vi
Índice de Figuras	vii
1 Introducción y Descripción del Sistema	1
El Levitron®. Descripción física del sistema	2
2 Modelado del sistema	7
2.1. Modelado de la peonza	7
2.2. Campo magnético de la base	7
2.2.1. Campo magnético exacto	8
2.2.2. Campo magnético aproximado	9
2.2.3. Desarrollo en serie de Taylor del campo en el eje	11
3 Dinámica del sistema	13
3.1. Ecuaciones generales	13
3.2. Sistema de referencia	14
3.2.1. Sistema 1	14
3.2.2. Sistema 2	14
3.2.3. Sistema 3	14
3.3. Movimiento de traslación	15
3.4. Movimiento de rotación	17
3.4.1. Momento cinético	17
3.5. Resumen de ecuaciones	19
3.6. Ecuaciones adimensionales	20
3.6.1. Variables adimensionales	20
3.6.2. Ecuaciones adimensionales	22
4 Sistema linealizado	25
4.1. Región de equilibrio vertical	25
4.2. Linealización del sistema de ecuaciones	27
4.2.1. Desacoplamiento	27
4.3. Estabilidad horizontal.	28
4.3.1. Región de estabilidad lineal	29
4.4. Soluciones del sistema lineal.	32
4.4.1. Expresión analítica de las soluciones	33
4.4.2. Caracterización de los modos normales	34
4.4.3. Variación de las frecuencias naturales frente a los parámetros	35
4.4.4. Variación de x_0 y ω_X frente a los parámetros	37
4.5. Resumen de conceptos	39
4.6. Simulación numérica	39

5	Sistema completo	41
5.1.	Exploración de los modos en el Sistema completo	41
5.1.1	Modo 1	42
5.1.2	Modo 2	48
5.1.3	Modo 3	51
5.1.4	Modo 4	58
5.2	Fronteras de estabilidad no lineal	62
5.3	Combinación de modos	66
5.3.1	Comportamiento al variar θ_0	66
5.3.2	Comportamiento al variar x_0	69
6	Discusión de los resultados	73
6.1	Alcance y validez de los resultados	73
6.2	Conclusiones	73
6.3	Desarrollos futuros	74
	Bibliografía	75

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 4-1. Resultados de la simulación numérica para $z_m = 3.1$ UL y $\Omega = 18$ UT ⁻¹	39
---	----

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 Punto de silla en un paraboloide hiperbólico	1
Figura 1.2 Roy Harrigan, inventor del Levitron®	2
Figura 1.3 Sistema completo del Levitron®	3
Figura 1.4 Vista lateral de la base	3
Figura 1.5 Peonza	4
Figura 1.6. Campo magnético en el eje	5
Figura 1.7. Energía potencial para distintos valores de β	6
Figura 2.1 M.dipolar	7
Figura 2.2 Campo magnético por dos espiras concéntricas. Imagen tomada de [4]	8
Figura 4.1 $z_m(\beta)$	26
Figura 4.2. Región de estabilidad lineal. Plano $z_m - \Omega$	30
Figura 4.3 Región de estabilidad lineal. Plano $\Omega - \beta$	31
Figura 4.4 Mínimo en la energía potencial. $z_m = 3.1 \text{ UL}$	32
Figura 4.5 Frecuencias naturales frente a Ω	35
Figura 4.6 Detalle modos 3 y 4	36
Figura 4.7 Variación de ω_1 y ω_2 frente a Ω para distintos z_m	36
Figura 4.8 Variación de ω_3 y ω_4 frente a Ω para distintos z_m	37
Figura 4.9 Variación de x_0 frente a Ω para distintos z_m . Modos 1 y 2.	37
Figura 4.10 Variación de x_0 frente a Ω para distintos z_m . Modos 3 y 4.	37
Figura 4.11 Variación de ω_{X_0} frente a Ω para distintos z_m . Modos 1 y 2	38
Figura 4.12 Variación de ω_{X_0} frente a Ω para distintos z_m . Modos 3 y 4	38
Figura 4.13. Radios de las órbitas para $z_m = 3.1 \text{ UL}$ y $\Omega = 18 \text{ UT}^1$	40
Figura 5.1 Movimiento en el plano XY. Modo 1. $\theta_0 = 0.5^\circ$	42
Figura 5.2 Movimiento en el eje OZ. Modo 1. $\theta_0 = 0.5^\circ$	43
Figura 5.3 Proyección del dipolo sobre el eje OZ. Modo 1. $\theta_0 = 0.5^\circ$	43
Figura 5.4 Ángulo que forma el dipolo con el campo. Modo 1. $\theta_0 = 0.5^\circ$	44
Figura 5.5 Movimiento en el plano XY. Modo 1. $\theta_0 = 2^\circ$	44
Figura 5.6 Movimiento vertical. Modo 1. $\theta_0 = 2^\circ$	45
Figura 5.7 Proyección del dipolo sobre el eje OZ. Modo 1. $\theta_0 = 2^\circ$	45
Figura 5.8 Ángulo que forma el dipolo con el campo. Modo 1. $\theta_0 = 2^\circ$	46
Figura 5.9 Movimiento en el plano XY. Modo 1. $\theta_0 = 7^\circ$	46
Figura 5.10 Movimiento vertical. Modo 1. $\theta_0 = 7^\circ$	47
Figura 5.11 Movimiento en tres dimensiones. Modo 1. $\theta_0 = 7^\circ$	47
Figura 5.12 Movimiento en el plano XY. Modo 2. $\theta_0 = 2^\circ$	48

Figura 5.13 Movimiento de precesión. Modo 2. $\theta_0 = 2^\circ$	48
Figura 5.14 Movimiento vertical. Modo 2. $\theta_0 = 2^\circ$	49
Figura 5.15 Ángulo que forma el dipolo con el campo. Modo 2. $\theta_0 = 2^\circ$	49
Figura 5.16 Movimiento en el plano XY. Modo 2. $\theta_0 = 8^\circ$	50
Figura 5.17 Movimiento de precesión. Modo 2. $\theta_0 = 8^\circ$	50
Figura 5.18 Movimiento tridimensional. Modo 2. $\theta_0 = 8^\circ$	51
Figura 5.19 Movimiento en el plano XY. Modo 3. $\theta_0 = 2^\circ$.	52
Figura 5.20 Movimiento vertical. Modo 3. $\theta_0 = 2^\circ$.	52
Figura 5.21 Movimiento de precesión. Modo 3. $\theta_0 = 2^\circ$.	53
Figura 5.22 Ángulo que forma el dipolo con el campo. Modo 3. $\theta_0 = 2^\circ$.	53
Figura 5.23 Movimiento en el plano XY. Modo 3. $\theta_0 = 8^\circ$.	54
Figura 5.24 Movimiento de precesión. Modo 3. $\theta_0 = 8^\circ$.	54
Figura 5.25 Movimiento vertical. Modo 3. $\theta_0 = 8^\circ$.	55
Figura 5.26 Ángulo que forma el dipolo con el campo. Modo 3. $\theta_0 = 8^\circ$.	55
Figura 5.27 Movimiento en el plano XY. Modo 3. $\theta_0 = 12^\circ$.	56
Figura 5.28 Movimiento de precesión. Modo 3. $\theta_0 = 12^\circ$.	56
Figura 5.29 Ángulo que forma el dipolo con el campo. Modo 3. $\theta_0 = 12^\circ$.	57
Figura 5.30 Movimiento tridimensional. Modo 3. $\theta_0 = 12^\circ$.	57
Figura 5.31 Movimiento en el plano XY. Modo 4. $\theta_0 = 2^\circ$.	58
Figura 5.32 Movimiento vertical. Modo 4. $\theta_0 = 2^\circ$.	58
Figura 5.33 Movimiento de precesión. Modo 4. $\theta_0 = 2^\circ$.	59
Figura 5.34 Ángulo que forma el dipolo con el campo. Modo 4. $\theta_0 = 2^\circ$.	59
Figura 5.35 Movimiento en plano XY. Modo 4. $\theta_0 = 7^\circ$.	60
Figura 5.36 Movimiento de precesión. Modo 4. $\theta_0 = 7^\circ$.	60
Figura 5.37 Ángulo que forma el dipolo con el campo. Modo 4. $\theta_0 = 7^\circ$.	61
Figura 5.38 Movimiento vertical. Modo 4. $\theta_0 = 7^\circ$.	61
Figura 5.39 Frontera de estabilidad no lineal. $z_m = \text{cte}$. Modo 1.	62
Figura 5.40 Frontera de estabilidad no lineal. $\Omega = \text{cte}$. Modo 1.	63
Figura 5.41 Frontera de estabilidad no lineal. $z_m = \text{cte}$. Modo 2.	63
Figura 5.42 Frontera de estabilidad no lineal. $\Omega = \text{cte}$. Modo 2.	64
Figura 5.43 Frontera de estabilidad no lineal. $z_m = \text{cte}$. Modo 3.	64
Figura 5.44 Frontera de estabilidad no lineal. $\Omega = \text{cte}$. Modo 3.	65
Figura 5.45 Frontera de estabilidad no lineal. $z_m = \text{cte}$. Modo 4.	65
Figura 5.46 Frontera de estabilidad no lineal. $\Omega = \text{cte}$. Modo 4.	66
Figura 5.47 Movimiento en el plano XY. $\theta_0 = 0.5^\circ$ y $\theta_0 = 6^\circ$.	67
Figura 5.48 Movimiento de precesión. $\theta_0 = 0.5^\circ$ y $\theta_0 = 3^\circ$.	67
Figura 5.49 Movimiento vertical. $\theta_0 = 3^\circ$ y $\theta_0 = 6^\circ$.	68

Figura 5.50 Movimiento en el plano XZ. $\theta_0 = 8^\circ$.	68
Figura 5.51 Tiempo de simulación $t_s[\text{UT}]$ frente a $\theta_0[^\circ]$.	69
Figura 5.52 Movimiento en el plano XY. $x_0 = 0.1 \text{ UL}$ y $x_0 = 0.3 \text{ UL}$	69
Figura 5.53 Movimiento de precesión. $x_0 = 0.3 \text{ UL}$ y $x_0 = 0.5 \text{ UL}$.	70
Figura 5.54 $\theta(t)$. $x_0 = 0.3 \text{ UL}$ y $x_0 = 0.5 \text{ UL}$.	70
Figura 5.55 Movimiento vertical. $x_0 = 0.3 \text{ UL}$ y $x_0 = 0.5 \text{ UL}$.	71
Figura 5.56 Distancia máxima de levitación estable en función de Ω .	71

1 INTRODUCCIÓN Y DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA

La levitación magnética es el fenómeno mediante el cual, un objeto permanece en suspensión sin otro apoyo que las fuerzas generadas por la acción de un campo magnético, oponiéndose a la fuerza gravitatoria u otro tipo de aceleración. La levitación ha sido objeto de fascinación e interés humano desde el descubrimiento de los materiales ferromagnéticos en la edad antigua. A través de la intuición, parece posible y fácil de realizar, que dos imanes enfrentados entre sí sean capaces permanecer levitando en equilibrio estático. Sin embargo la práctica demuestra que esto no es posible utilizando materiales paramagnéticos comunes, el imán siempre acaba rotando y saliendo despedido.

La imposibilidad de una levitación estática y estable fue formulada por Samuel Earnshaw en 1842. El **teorema de Earnshaw** prohíbe la levitación estable de materiales magnéticos permanentes en presencia únicamente de imanes comunes o corrientes estáticas. Su explicación reside en que, para que exista equilibrio estático en un punto, todas las líneas de fuerza del campo deben apuntar a ese punto, de manera que, ante cualquier perturbación, el objeto sea dirigido al punto inicial. Esto quiere decir que la divergencia del campo de fuerzas en ese punto debe ser negativa. Pero en el caso de fuerzas derivadas de un potencial armónico que satisfaga la ecuación de Laplace, como es el caso de los campos magnéticos y electrostáticos, y según la ley de Gauss, se tiene:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (-\nabla U) = -\nabla^2 U = 0 \quad (1-1)$$

Este resultado implica que no puede haber un mínimo en la energía potencial de un sistema formado solo por fuerzas conservativas, derivadas de un potencial armónico, sino que este es, a lo sumo, un punto de silla. Es por tanto que un sistema formado solo por imanes y materiales paramagnéticos o cargas electrostáticas no puede alcanzar el equilibrio estático. El equilibrio puede producirse en alguna o varias direcciones, pero es inestable en, al menos, una dirección. Visualmente se puede representar como una bola que se encuentra en el punto representado en la *Figura 1.1*, sobre un paraboloides hiperbólico. [\[1\]](#)

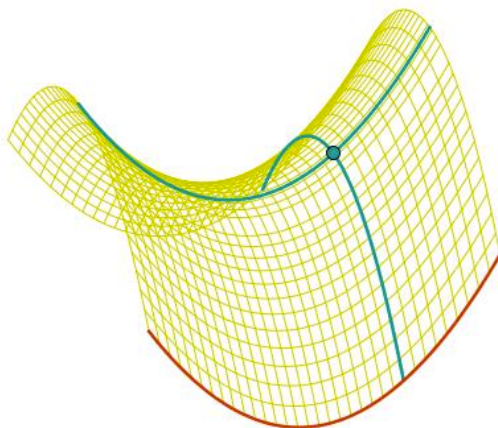


Figura 1.1 *Punto de silla en un paraboloides hiperbólico*

Sin embargo, este teorema ha intentado ser rebatido por numerosos físicos varias veces a lo largo de la historia. Es por eso que han surgido excepciones en las que no el teorema no es aplicable y se puede dar, de hecho, la levitación magnética bajo ciertas condiciones. A lo largo de la historia han surgido casos bien conocidos de levitación magnética, como son:

- El uso de materiales superconductores.
- Campos electromagnéticos variables con el tiempo, utilizado en los trenes comúnmente conocidos como Maglev.
- El uso de materiales diamagnéticos, con inducción magnética opuesta al campo aplicado.

De forma adicional a todos esos casos ya conocidos, en 1976, Roy Harrigan inventó el Levitron[®], que posteriormente fue patentado (1983) y ampliamente comercializado durante la década de los 90 como un juguete educativo en los EE.UU. Este invento supuso el descubrimiento de la levitación estabilizada por efecto giroscópico, que se sumó a las excepciones de la no aplicabilidad del Teorema de Earnshaw. [2]

El Levitron[®]. Descripción física del sistema

Roy Harrigan descubrió la posibilidad de conseguir una levitación por períodos de tiempo prolongados haciendo uso únicamente del giro propio de la peonza. Criticado por muchos por incumplir, aparentemente, el teorema de Earnshaw, no logró tener la aceptación que esperaba, no vendiendo casi ninguna unidad desde sus inicios. Sin embargo, y por desgracia de Harrigan, no fue hasta 1995 cuando Bill Hones de la empresa de juguetes *Fascinations* descubrió la patente ya existente e introdujo unas pequeñas modificaciones para introducir su propia patente y poder comercialarlo bajo el nombre de Levitron[®].

La patente de Harrigan incluía una base circular que hacía que la peonza se desestabilizase al poco tiempo, y era muy difícil hacerla levitar. Hones se apoyaba en los argumentos de los físicos que criticaban al invento original, y cambió la base circular por una cuadrada. Este cambio carecía de diferencias físicas perceptibles, ya que los principios físicos que gobiernan ambos inventos son los mismos. Sin embargo, las leyes de protección industrial permitían incluir una nueva patente tan solo con esta ligera modificación. La patente modificada de Hones consiguió vender más de 700,000 copias en los Estados Unidos, siendo un juguete muy popular en la época de los 90.

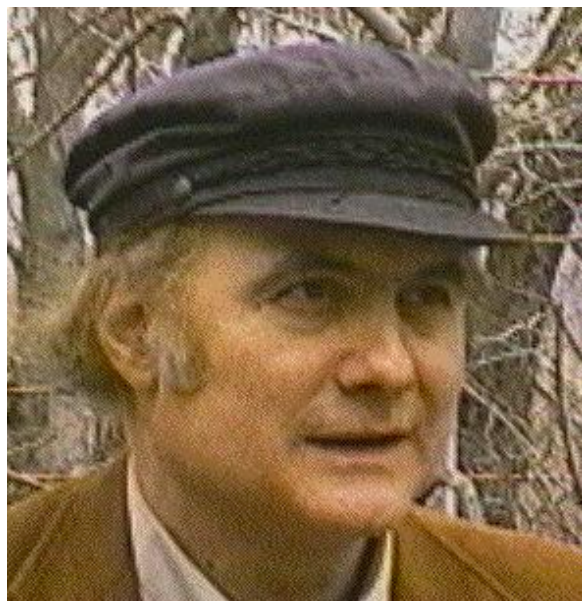


Figura 1.2 Roy Harrigan, inventor del Levitron[®].

El Levitron[®] consiste en una base imantada apoyada sobre unas patas regulables para conseguir el campo lo mas vertical posible, y por otro lado una peonza imantada en sentido opuesto al campo de la base. A continuación se muestran unas imágenes tomadas del ejemplar disponible en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sevilla, por el profesor Antonio González. Este modelo se ha utilizado como referencia a lo largo de todo el desarrollo de este trabajo.



Figura 1.3 *Sistema completo del Levitron[®].*

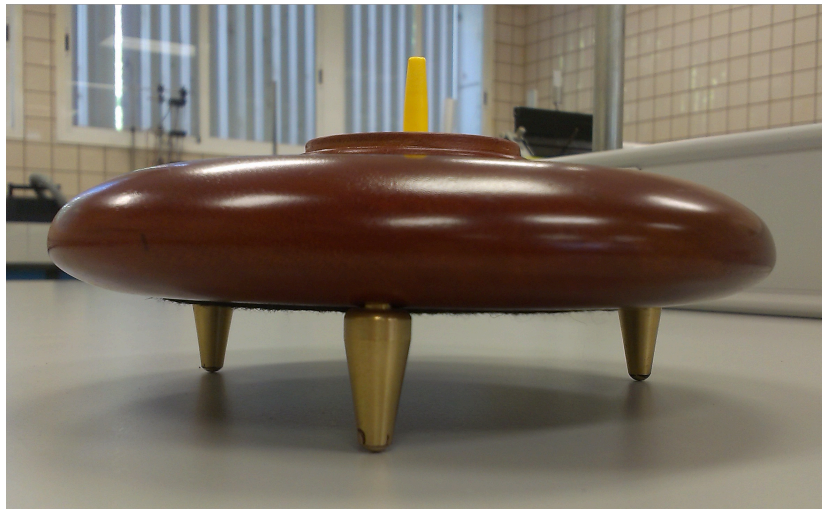


Figura 1.4 *Vista lateral de la base*



Figura 1.5 *Peonza*

Las medidas del sistema empleado como modelo en este estudio son 70 mm para el diámetro externo del disco imantado, 25 mm para el diámetro interior y un espesor de 3.2 mm. La peonza tiene un diámetro de 29.2 mm, por lo que a una altura lo suficientemente alejada, puede considerarse como un dipolo magnético.

La forma de proceder es la siguiente: la peonza se eleva hasta la altura de levitación, que es de unos 7.5 cm aproximadamente como se demostrará en capítulos posteriores. A continuación, se hace girar alrededor de su eje vertical apoyada en una superficie lisa lo más cerca posible del eje vertical de la base, de forma que ambos estén aproximadamente alineados entre sí. Una vez puesta en giro sobre la superficie plana, esta se retira suavemente hasta que la peonza queda levitando encima de la base. La velocidad de giro esta en torno a 6 rev/s, y se trata de uno de los parámetros críticos a controlar, junto a la masa del sistema y el ángulo de inclinación. Con el objetivo de modificar la masa de la peonza, el Levitron[®] trae consigo unos pequeños aros metálicos, que añadidos a la peonza aumentan levemente la masa. De esta manera, se puede conseguir el equilibrio perfecto para la levitación.

La masa del sistema resulta un parámetro crítico en la determinación de posiciones de equilibrio, ya que debe existir un balance entre repulsión magnética y el peso de la peonza para que ambas fuerzas se contrarresten entre sí. Como se ha introducido anteriormente a través del Teorema de Earnshaw, para que exista estabilidad estática en un punto del sistema, la energía potencial debe presentar un punto estacionario en el que el gradiente vale cero. Para el caso del Levitron[®] considerado como un dipolo puntual $\vec{\mu}$ alineado con el eje vertical se tiene:

$$U = mgz - \vec{\mu} \cdot \vec{B} = mgz + \mu B_0(z) \quad (1-2)$$

Como el campo magnético de la base imantada presenta un máximo en torno a una distancia de 5 cm de la base, es importante controlar la masa del dipolo para que exista un mínimo en la energía potencial del mismo. Una representación gráfica del campo magnético se muestra en la Figura 1.6. [5]

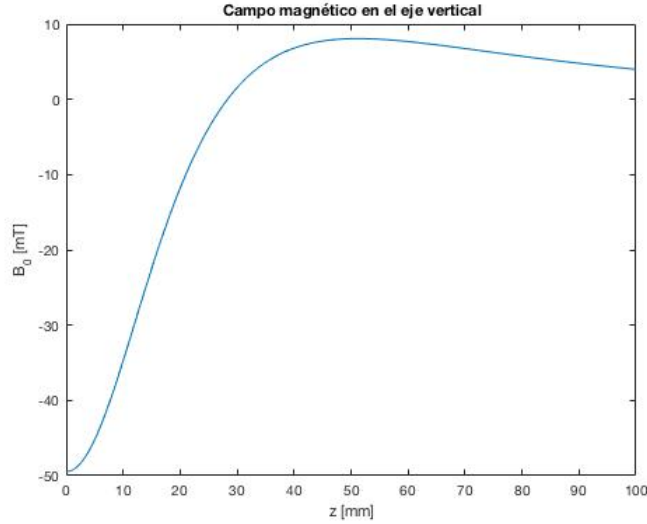


Figura 1.6. *Campo magnético en el eje.*

Una masa demasiado grande del dipolo implicaría que el término asociado a la energía potencial gravitatoria se haga demasiado grande la energía potencial total no presente ningún mínimo. A pesar de que en capítulos posteriores se analizará con mayor profundidad los puntos de equilibrio estático del dipolo y las regiones estables, aquí se pretende dar una introducción cualitativa para una mayor comprensión del problema que se está planteando.

A lo largo del trabajo se trabajará utilizando variables adimensionales con el objetivo de obtener resultados más generales en las simulaciones numéricas. Aunque no es el objeto de esta introducción y en el Capítulo 3 se describirán con mayor detalle, aquí se presentan algunas de las unidades utilizadas para la adimensionalización, así como los parámetros que resultan.

$$z^* = \frac{z}{a} \quad B_0^* = \frac{B_0}{B_u} \quad U^* = \frac{\mu a}{B_u} U \quad (1-3)$$

Donde a designa el radio de la base imantada y B_u un cierto valor de referencia para el campo magnético. También se introduce el parámetro $\beta = \mu B_u / m g a$, con el que se trabajará a lo largo de todo el trabajo para designar el cociente μ/m , utilizado con motivo de la incertidumbre en las medidas experimentales de μ tomadas de [5].

Cuando el dipolo se encuentra perfectamente alineado con el eje del disco imantado, la energía potencial toma la forma (adimensional):

$$U^* = z^* + \beta B_0^*(z) \quad (1-4)$$

Es condición necesaria que para que exista estabilidad en la levitación, exista un mínimo relativo en la dirección vertical en la energía potencial. Aunque esto no quiere decir que el dipolo se encuentre en equilibrio estable por si solo, ya que siempre existirá inestabilidad en el resto de direcciones, en concordancia con el Teorema de Earnshaw.

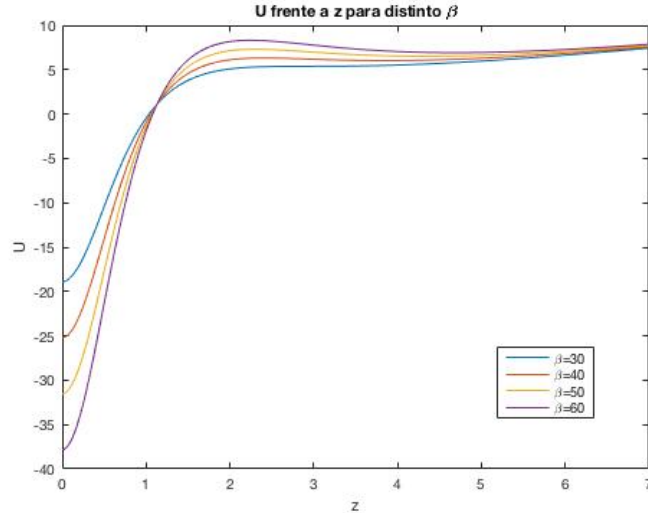


Figura 1.7. *Energía potencial para distintos valores de β .*

Como se puede observar, el mínimo de la energía potencial en dirección vertical se hace mas “profundo” en tanto en cuanto la masa del dipolo va decreciendo (β aumenta). Esto indica que existe un mínimo valor de β para el cual puede existir levitación estable (valor en el que hay un punto de silla), y a partir del cual existe un mínimo en la energía y por tanto hay zona estable. Sin embargo, la presencia de un mínimo en la energía potencial del dipolo alineado en el eje solo tiene en cuenta la existencia de una zona estable en el eje vertical, por lo que no se puede asegurar la estabilidad en el plano horizontal. Este concepto será aclarado y discutido con mayor profundidad en capítulos posteriores.

El objetivo de este trabajo es el de analizar la dinámica del Levitron[®], su modelo linealizado y no lineal. Para ello se asumirá que la peonza actúa como un disco, y que puede considerarse un dipolo magnético. Se resolverán numéricamente las ecuaciones en MATLAB[®] y se establecerán las condiciones en las que es posible una levitación estable.

Primeramente, se definirán las condiciones de equilibrio estático en el caso de que el dipolo se encontrase hipotéticamente alineado con el eje vertical del campo de la base. Posteriormente, A partir de ahí, se desarrollará un modelo linealizado en torno al punto de equilibrio predefinido, en el que los movimientos sobre el eje vertical y los horizontales están desacoplados. Además, se estudiarán variaciones de los parámetros críticos que conforman al sistema, así como modificaciones en las condiciones iniciales de giro. Para todo este análisis, se considerará la mecánica clásica vectorial, y se obtendrá un sistema de ecuaciones diferenciales a partir de las ecuaciones vectoriales de cantidad de movimiento y momento cinético en un modelo de sólido rígido para el dipolo.

2 MODELADO DEL SISTEMA

En este capítulo se describe el modelo de sólido rígido con seis grados de libertad de la peonza utilizado para deducir las ecuaciones de la dinámica, así como el modelado del campo magnético de la base y la peonza.

2.1. Modelado de la peonza

La peonza imantada puede ser aproximada como un disco de las mismas dimensiones, ya que la parte metálica tiene esta forma y es donde se concentra la mayoría de la masa de la misma. Si se considera de esta manera, se tiene que el tensor de inercia medido en un sistema de referencia ligado al eje OZ es:

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} I_X & 0 & 0 \\ 0 & I_X & 0 \\ 0 & 0 & I_Z \end{pmatrix} = \frac{1}{4} m R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2-1)$$

donde R es el radio de la peonza. Se tiene así que el cociente de inercias es $I_X/I_Z \approx 2$. Tomaremos este valor en la resolución numérica posterior.

El imán de la peonza, se puede aproximar como un dipolo puntual, con momento dipolar $\vec{\mu}$ alineado con el eje de simetría de la peonza y apuntando la base inferior, como se puede apreciar en la Figura 2.1.

2.2. Campo magnético de la base

El campo generado por la base magnética puede ser modelado como el producido por dos espiras concéntricas de radios a y b por las que circula una corriente de la misma intensidad I , en sentidos opuestos. Una ilustración de esta situación se muestra en la Figura 2.2.



Figura 2.1
M. dipolar

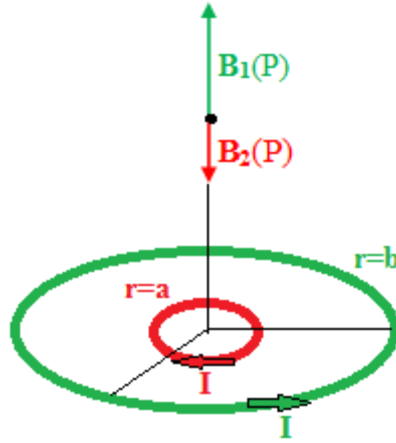


Figura 2.2 Campo magnético por dos espiras concéntricas. Imagen tomada de [4].

2.2.1. Campo magnético exacto

La expresión del campo magnético exacto puede hallarse haciendo uso de integrales elípticas. En este trabajo solo se recogen las expresiones finales. La deducción matemática completa puede encontrarse en [10].

Usando coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x} \quad (2-2)$$

La expresión del campo producido por estas dos espiras en todo el espacio, en coordenadas cilíndricas, según [5] toma una forma:

$$\vec{B}(\rho, z) = B_\rho \vec{u}_\rho + B_z \vec{u}_z \quad (2-3)$$

$$B_\rho = \frac{\mu_0 I z}{4\pi \rho} \left(\frac{1}{d_b} \left(\frac{D_b^2 + d_b^2}{D_b^2} E(m_b) - K(m_b) \right) - \frac{1}{d_a} \left(\frac{D_a^2 + d_a^2}{D_a^2} E(m_a) - K(m_a) \right) \right) \quad (2-4)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{d_b} \left(\frac{4b^2 - d_b^2 - D_b^2}{2D_b^2} E(m_a) + K(m_a) \right) - \frac{1}{d_a} \left(\frac{4a^2 - d_a^2 - D_a^2}{2D_a^2} E(m_a) + K(m_a) \right) \right) \quad (2-5)$$

Donde

$$\begin{aligned} m_a &= -\frac{4\rho a}{(\rho - a)^2 + z^2} & d_a &= \sqrt{(\rho - a)^2 + z^2} & D_a &= \sqrt{(\rho + a)^2 + z^2} \\ m_b &= -\frac{4\rho b}{(\rho - b)^2 + z^2} & d_b &= \sqrt{(\rho - b)^2 + z^2} & D_b &= \sqrt{(\rho + b)^2 + z^2} \end{aligned} \quad (2-6)$$

Y $E(m)$ y $K(m)$ indican las integrales elípticas completas de primera y segunda especie respectivamente, tales que:

$$E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m \sin^2(\theta)} d\theta \quad K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - m \sin^2(\theta)}} d\theta \quad (2-7)$$

Como se puede apreciar, estas expresiones resultan complicadas de manejar, y su uso supondría un gasto computacional y un aumento del error numérico demasiado grandes para la precisión requerida en este trabajo. Es por tanto que se ha decidido utilizar una aproximación basada en un desarrollo en serie de potencias alrededor del campo magnético en el eje, cuya expresión analítica es conocida y manejable.

2.2.2. Campo magnético aproximado

Como alternativa a la expresión anterior, se ha optado por utilizar una serie de potencias en torno al campo magnético del eje, cuya expresión analítica es más manejable. La expresión del campo magnético en el eje es sencilla y según [6], para el caso de dos espiras concéntricas con corrientes iguales y en sentidos opuestos toma la forma:

$$\vec{B}_0 = A \left(\frac{b^2}{(b^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \hat{k}_1 \quad (2-8)$$

Donde $A = \mu_0 I / 2$ es un parámetro medido experimentalmente, de [5] se tiene que $A = 1.9608 \cdot 10^3 \text{ mm} \cdot \text{mT}$. Para el radio de la espira pequeña se tiene $a = 25 \text{ mm}$ por las dimensiones del disco interior y el de la espira grande $b = 67.6864 \text{ mm}$.

Una vez se tiene la expresión analítica del campo en el eje, se deben obtener expresiones aproximadas en serie de potencias para las componentes radial B_ρ , y vertical B_z . Partiendo de las ecuaciones de la magnetostática, quedan reducidas para este caso a

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial B_\rho}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \rho} = 0 \quad (2-9)$$

Suponiendo que nos encontramos cerca del eje OZ se tiene que $B_z \approx B_0$. De la segunda ecuación de (2-9), se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) = -\rho \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\rho \frac{dB_0}{dz} \quad (2-10)$$

Integrando esta expresión

$$\rho B_\rho = -\frac{\rho^2}{2} \frac{dB_0}{dz} \rightarrow B_\rho = -\frac{\rho}{2} \frac{dB_0}{dz} \quad (\rho \ll 1) \quad (2-11)$$

Y llevando la expresión de B_ρ a la primera ecuación de (2-8)

$$\frac{\partial B_z}{\partial \rho} = \frac{\partial B_\rho}{\partial z} = -\frac{\rho}{2} \frac{d^2 B_0}{dz^2} \quad \rightarrow \quad B_z = B_0(z) - \frac{\rho^2}{4} \frac{d^2 B_0}{dz^2} \quad (2-12)$$

Este proceso puede repetirse indefinidamente, resultando una serie de potencias. Las expresiones generales para la componente vertical son:

$$B_z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^{2n} \quad a_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!^2} \frac{d^{2n} B_0}{dz^{2n}} \quad (2-13)$$

Y para la componente radial:

$$B_\rho = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \rho^{2n+1} \quad b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1} n! (n+1)!} \frac{d^{(2n+1)} B_0}{dz^{(2n+1)}} \quad (2-14)$$

Para el análisis posterior se utilizarán las expresiones de la serie hasta $n=2$, resultando:

$$B_z = B_0(z) - \frac{\rho^2}{4} B_0''(z) + \frac{\rho^4}{64} B_0''''(z) \quad (2-15)$$

$$B_\rho = -\frac{\rho}{2} B_0'(z) + \frac{\rho^3}{16} B_0'''(z) \quad (2-16)$$

La expresión (2-16) se puede escribir en coordenadas cartesianas sabiendo que:

$$\vec{u}_\rho = \frac{x}{\rho} \vec{i} + \frac{y}{\rho} \vec{j} \quad (2-17)$$

Por tanto sus componentes son:

$$B_x = -\frac{x}{2} B_0'(z) + \frac{x(x^2 + y^2)}{16} B_0'''(z) \quad B_y = -\frac{y}{2} B_0'(z) + \frac{y(x^2 + y^2)}{16} B_0'''(z) \quad (2-18)$$

$$B_z = B_0(z) - \frac{x^2 + y^2}{4} B_0''(z) + \frac{(x^2 + y^2)^2}{64} B_0''''(z) \quad (2-19)$$

Estimación del error.

El error cometido en esta aproximación puede estimarse como el valor del siguiente término de la serie despreciado. Así, expandiendo la serie hasta $n=3$ se tienen las expresiones del error cometido. Para la componente vertical es:

$$E_{B_z} = -\frac{(x^2 + y^2)^3}{2304} \frac{d^6 B_0}{dz^6} \quad (2-20)$$

Y para las componentes horizontales:

$$E_{B_x} = -\frac{x(x^2 + y^2)^2}{4608} \frac{d^5 B_0}{dz^5} \quad E_{B_y} = -\frac{y(x^2 + y^2)^2}{4608} \frac{d^5 B_0}{dz^5} \quad (2-21)$$

2.2.3. Desarrollo en serie de Taylor del campo en el eje

La expresión del campo se puede simplificar aún más si suponemos que la peonza se mueve muy cercana a una posición de equilibrio vertical. Como se verá en capítulos posteriores existe una posición de equilibrio en el eje OZ en la cual la energía potencial presenta un mínimo relativo en la dirección vertical, y equivale a una posición de equilibrio metaestable. Desarrollando en serie de Taylor la expresión del campo magnético en el eje, en torno a dicho punto z_m , se tiene:

$$B_0(z) \approx B + K\Delta z + \frac{S}{2}\Delta z^2 + \frac{T}{6}\Delta z^3 + \frac{C}{24}\Delta z^4 + \dots \quad (2-22)$$

Donde $\Delta z = z - z_m$, $B = B_0(z_m)$ y K, S, T, C indican las derivadas $B_0(z)$ de primer, segundo, tercer y cuarto orden evaluadas en z_m , respectivamente.

Truncando en la cuarta potencia e introduciendo el desarrollo en las expresiones (2-18) y (2-19), se tiene que las componentes del campo se pueden escribir como

$$B_x = -\frac{x}{2} \left(K + S\Delta z + \frac{T}{2}\Delta z^2 + \frac{C}{6}\Delta z^3 \right) + \frac{x(x^2 + y^2)^2}{16} (T + C\Delta z) \quad (2-23)$$

$$B_y = -\frac{y}{2} \left(K + S\Delta z + \frac{T}{2}\Delta z^2 + \frac{C}{6}\Delta z^3 \right) + \frac{y(x^2 + y^2)^2}{16} (T + C\Delta z) \quad (2-24)$$

$$B_z = \left(B + K\Delta z + \frac{S}{2}\Delta z^2 + \frac{T}{6}\Delta z^3 + \frac{C}{24}\Delta z^4 \right) + \frac{(x^2 + y^2)}{4} \left(S + T\Delta z + \frac{C}{2}\Delta z^2 \right) + \frac{(x^2 + y^2)^2}{64} C \quad (2-25)$$

Estimación del error.

Si se utiliza esta aproximación se tienen dos causas de error: por una parte el alejamiento vertical de la posición de equilibrio, que nos da el error del desarrollo en serie de Taylor, y por otra el alejamiento horizontal que nos da el error de la serie de potencias. Estos errores, aunque varían de forma independiente, se van a considerar del mismo orden y solo se va a considerar una expresión general del error.

Expandiendo la serie de Taylor hasta la quinta derivada P , agrupando términos se obtiene que las estimaciones del error son:

$$E_{B_z} = \left(\frac{\Delta z^5}{120} - \frac{x^2 + y^2}{24}\Delta z^3 + \frac{(x^2 + y^2)^2}{64}\Delta z \right) P \quad (2-26)$$

$$E_{B_x} = \left(-x \frac{\Delta z^4}{120} - \frac{x(x^2 + y^2)}{32}\Delta z + \frac{x(x^2 + y^2)^2}{64} \right) P \quad (2-27)$$

$$E_{B_y} = \left(-y \frac{\Delta z^4}{120} - \frac{y(x^2 + y^2)}{32}\Delta z + \frac{y(x^2 + y^2)^2}{64} \right) P \quad (2-28)$$

Estas expresiones permitirán generar una idea del orden de magnitud del error cometido en la aproximación del campo magnético. De ese modo, una vez se hayan resuelto explícitamente las ecuaciones del movimiento y sean conocidas las funciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$, se podrá estimar el error cometido en la aproximación de cada componente del campo en términos relativos como función del tiempo de manera que $error(t) = E_B(t)/|B(t)|$.

3 DINÁMICA DEL SISTEMA

En este capítulo se deducirán las ecuaciones de movimiento del Levitron[®] en forma de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden para su posterior resolución numérica en MATLAB[®]. Para ello se utilizarán las formulaciones de la mecánica clásica newtoniana en su forma vectorial, como el segundo principio de Newton o el teorema del momento cinético, que rigen las leyes del movimiento en forma vectorial. Posteriormente se introducirá el sistema de referencia utilizado, cuyas coordenadas angulares son una variante de los ángulos de Euler y los ángulos de Tait-Bryan (pitch, roll y yaw) utilizados en ingeniería aeronáutica. Utilizando un sistema de referencia intermedio, y gracias a la simetría de revolución de la peonza, se expandirán las ecuaciones diferenciales del movimiento componente a componente. Por último, se adimensionalizarán las ecuaciones y se introducirán los parámetros que controlan el movimiento del sistema para su posterior resolución numérica.

3.1. Ecuaciones generales

Utilizando las ecuaciones generales de la dinámica newtoniana para un sólido rígido, separamos los movimientos de translación del centro de masas y las rotaciones alrededor del mismo. Así, por un lado se tiene:

$$\vec{F} = m\vec{a}_G = m \frac{d\vec{v}_G}{dt} \quad (3-1)$$

La ecuación (3-1) define la translación del centro de masas, G, de la peonza. Por otro lado:

$$\vec{M}^G = \frac{d\vec{L}^G}{dt} \quad (3-2)$$

Esta última ecuación permite obtener las rotaciones relativas al centro de masas.

Las fuerzas y momentos que actúan en el problema son debidos únicamente a la acción del peso de la peonza, y la acción del campo magnético. Se despreciarán efectos de la fricción con el aire como primera aproximación. La fuerza resultante sobre el dipolo es:

$$\vec{F} = m\vec{g} + \nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) \quad (3-3)$$

Y el momento relativo al centro de masas:

$$\vec{M}^G = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (3-4)$$

El momento cinético se escribe como el producto del tensor de inercia por la velocidad angular:

$$\vec{L}^G = \vec{I} \cdot \vec{\omega} \quad (3-5)$$

Como se ha comentado, las únicas fuerzas actuantes son la gravitatoria y magnética, ambas conservativas. Por tanto la energía mecánica del sistema se mantiene constante en todo el movimiento y se puede escribir como:

$$E = U + K = mgz_G - \vec{\mu} \cdot \vec{B} + \frac{1}{2} m |\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}^G \quad (3-6)$$

3.2. Sistema de referencia

A continuación se describirá el sistema de referencia utilizado, como una sucesión de rotaciones a través de sistemas de referencia intermedios desde el sistema fijo “1” hasta llegar a un sistema de ejes ligados al sólido “4”. Los sistemas que se usarán para deducir las ecuaciones dinámicas serán el “1” y el “3”, por lo que se les dotará de una notación especial para simplificar la escritura y se dará especial énfasis en las transformaciones entre ambos. Se describirán sus componentes con subíndices en letras minúsculas y mayúsculas, para el sistema “1” y “3” respectivamente.

3.2.1. Sistema 1

El sistema de referencia fijo “1” corresponde a las coordenadas (x, y, z) . Su eje Oz se encuentra alineado con el eje del disco de la base imantada y apuntando hacia arriba. El plano Oxy corresponde con el plano de la base. Al ser un problema con simetría cilíndrica, la orientación de los ejes Ox y Oy puede ser tomada de forma arbitraria.

3.2.2. Sistema 2

El sistema intermedio “2” ($OX_2Y_2Z_2$) resulta del sistema “1” por medio de una rotación de ángulo ϕ alrededor del eje Ox , de manera que $Ox = OX_2$. Las relaciones entre los vectores de ambas bases son:

$$\begin{aligned} \vec{i}_2 &= \vec{i}_1 \\ \vec{j}_2 &= \cos \phi \vec{j}_1 + \sin \phi \vec{k}_1 \\ \vec{k}_2 &= -\sin \phi \vec{j}_1 + \cos \phi \vec{k}_1 \end{aligned} \quad (3-7)$$

3.2.3. Sistema 3

El sistema “3” ($OXYZ$) resulta de una rotación alrededor del eje OY_2 . Las relaciones entre los vectores de la base “2” y “3” son:

$$\begin{aligned} \vec{i}_3 &= \cos \theta \vec{i}_2 - \sin \theta \vec{k}_2 \\ \vec{j}_3 &= \vec{j}_2 \\ \vec{k}_3 &= \sin \theta \vec{i}_2 + \cos \theta \vec{k}_2 \end{aligned} \quad (3-8)$$

Y respecto a la base “1”:

$$\begin{aligned}\vec{i}_3 &= \cos \theta \vec{i}_1 + \sin \theta \sin \phi \vec{j}_1 - \sin \theta \cos \phi \vec{k}_1 \\ \vec{j}_3 &= \cos \phi \vec{j}_1 + \sin \phi \vec{k}_1 \\ \vec{k}_3 &= \sin \theta \vec{i}_1 - \cos \theta \sin \phi \vec{j}_1 + \cos \theta \cos \phi \vec{k}_1\end{aligned}\quad (3-9)$$

La relación inversa es:

$$\begin{aligned}\vec{i}_1 &= \cos \theta \vec{i}_3 + \sin \theta \vec{k}_3 \\ \vec{j}_1 &= \sin \theta \sin \phi \vec{i}_3 + \cos \phi \vec{j}_3 - \cos \theta \sin \phi \vec{k}_3 \\ \vec{k}_1 &= -\sin \theta \cos \phi \vec{i}_3 + \sin \phi \vec{j}_3 + \cos \theta \cos \phi \vec{k}_3\end{aligned}\quad (3-10)$$

3.3. Movimiento de traslación

Escribiendo la ecuación (3-1) por componentes, en el sistema fijo, se tiene:

$$F_x = m\ddot{x} \quad F_y = m\ddot{y} \quad F_z = m\ddot{z} \quad (3-11)$$

Y las componentes del vector fuerza son

$$\begin{aligned}F_x &= \frac{\partial}{\partial x}(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) \\ F_y &= \frac{\partial}{\partial y}(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) \\ F_z &= \frac{\partial}{\partial z}(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) - mg\end{aligned}\quad (3-12)$$

Haciendo uso de las relaciones dadas en (3-9), el momento dipolar se puede escribir en la base del sistema de referencia fijo como:

$$\vec{\mu} = -\mu \vec{k}_3 = \begin{cases} \mu_x = -\mu \sin \theta \\ \mu_y = \mu \cos \theta \sin \phi \\ \mu_z = -\mu \cos \theta \cos \phi \end{cases} \quad (3-13)$$

Introduciendo estas expresiones en (3-12):

$$\begin{aligned}F_x &= -\mu \sin \theta \frac{\partial B_x}{\partial x} + \mu \cos \theta \sin \phi \frac{\partial B_y}{\partial x} - \mu \cos \theta \cos \phi \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ F_y &= -\mu \sin \theta \frac{\partial B_x}{\partial y} + \mu \cos \theta \sin \phi \frac{\partial B_y}{\partial y} - \mu \cos \theta \cos \phi \frac{\partial B_z}{\partial y} \\ F_z &= -\mu \sin \theta \frac{\partial B_x}{\partial z} + \mu \cos \theta \sin \phi \frac{\partial B_y}{\partial z} - \mu \cos \theta \cos \phi \frac{\partial B_z}{\partial z} - mg\end{aligned}\quad (3-14)$$

La expresión (3-11) se puede escribir como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, combinándolo con (3-14), se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & v_x \\ \dot{y} & = & v_y \\ \dot{z} & = & v_z \\ \dot{v}_x & = & \frac{\mu}{m} \left(-\sin \theta \frac{\partial B_x}{\partial x} + \cos \theta \sin \phi \frac{\partial B_y}{\partial x} - \cos \theta \cos \phi \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \\ \dot{v}_y & = & \frac{\mu}{m} \left(-\sin \theta \frac{\partial B_x}{\partial y} + \cos \theta \sin \phi \frac{\partial B_y}{\partial y} - \cos \theta \cos \phi \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) \\ \dot{v}_z & = & \frac{\mu}{m} \left(-\sin \theta \frac{\partial B_x}{\partial z} + \cos \theta \sin \phi \frac{\partial B_y}{\partial z} - \cos \theta \cos \phi \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) - g \end{array} \right. \quad (3-15)$$

Si se introducen las expresiones del campo magnético deducidas en el capítulo anterior, (2-18) y (2-19) y se derivan, el sistema queda:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & v_x \\ \dot{y} & = & v_y \\ \dot{z} & = & v_z \\ \dot{v}_x & = & -\frac{\mu}{m} \sin \theta \left(-\frac{1}{2} B'_0(z) + \frac{3x^2 + y^2}{16} B_0'''(z) \right) + \frac{\mu}{m} \cos \theta \sin \phi \frac{xy}{8} B_0'''(z) - \\ & & -\frac{\mu}{m} \cos \theta \cos \phi \left(-\frac{x}{2} B_0''(z) + \frac{x(x^2 + y^2)}{16} B_0'''(z) \right) \\ \dot{v}_y & = & -\frac{\mu}{m} \sin \theta \frac{xy}{8} B_0''' + \frac{\mu}{m} \cos \theta \sin \phi \left(-\frac{1}{2} B'_0(z) + \frac{x^2 + 3y^2}{16} B_0'''(z) \right) - \\ & & -\frac{\mu}{m} \cos \theta \cos \phi \left(-\frac{y}{2} B_0''(z) + \frac{y(x^2 + y^2)}{16} B_0'''(z) \right) \\ \dot{v}_z & = & -\frac{\mu}{m} \sin \theta \left(-\frac{x}{2} B_0''(z) + \frac{x(x^2 + y^2)}{16} B_0'''(z) \right) \\ & & + \frac{\mu}{m} \cos \theta \sin \phi \left(-\frac{y}{2} B'_0(z) + \frac{y(x^2 + y^2)}{16} B_0'''(z) \right) \\ & & -\frac{\mu}{m} \cos \theta \cos \phi \left(B'_0(z) - \frac{x^2 + y^2}{4} B_0'''(z) + \frac{(x^2 + y^2)^2}{64} B_0^{(5)}(z) \right) - g \end{array} \right. \quad (3-16)$$

3.4. Movimiento de rotación

Para deducir las ecuaciones correspondientes a la rotación de la peonza, se aplicará el teorema del momento cinético, utilizando el sistema “3” como base para las derivadas temporales. Por la simetría de revolución de la peonza, el tensor de inercia es igual en cualquier sistema de ejes coordenados que contenga al eje Z del disco y cuyo plano XY coincida con el del disco (ejes principales de inercia).

3.4.1. Momento cinético

La variación temporal (respecto de un sistema de referencia inercial) del momento cinético es igual al momento dinámico sobre el mismo punto:

$$\left. \frac{d\vec{L}_G}{dt} \right|_1 = \vec{M}^G \quad (3-17)$$

Donde el momento cinético se escribe, en ejes principales de inercia tal y como se están utilizando:

$$\vec{L}_G = \vec{I} \cdot \vec{\omega}_{41} = I_X \omega_X \vec{i}_3 + I_Y \omega_Y \vec{j}_3 + I_Z \omega_Z \vec{k}_3 \quad (3-18)$$

Y el momento dinámico:

$$\vec{M}^G = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (3-19)$$

La velocidad de rotación del dipolo (sistema “4”) respecto del sistema fijo “1” tiene la forma (expresado en el sistema “3”):

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_{41} &= \vec{\omega}_{43} + \vec{\omega}_{32} + \vec{\omega}_{21} \\ &= \dot{\psi} \vec{k}_3 + \dot{\theta} \vec{j}_3 + \dot{\phi} \vec{i}_2 = \dot{\phi} \cos \theta \vec{i}_3 + \dot{\theta} \vec{j}_3 + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \sin \theta) \vec{k}_3 \end{aligned} \quad (3-20)$$

De donde se deduce:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{\omega_X}{\tan \theta} \\ \dot{\theta} &= \omega_Y \\ \dot{\psi} &= \omega_Z - \omega_X \tan \theta \end{aligned} \quad (3-21)$$

Para derivar respecto del sistema fijo utilizando los ejes móviles usamos la formula de Poisson

$$\left. \frac{d\vec{L}^G}{dt} \right|_1 = \left. \frac{d\vec{L}^G}{dt} \right|_3 + \vec{\omega}_{31} \times \vec{L}^G \quad (3-22)$$

La velocidad de rotación del sistema intermedio “3” se puede expresar en términos de la velocidad de rotación del sólido tal que:

$$\vec{\omega}_{31} = \vec{\omega}_{32} + \vec{\omega}_{21} = \dot{\theta} \vec{j}_3 + \dot{\phi} \vec{i}_2 = \omega_X \vec{i}_3 + \omega_Y \vec{j}_3 + \omega_X \tan \theta \vec{k}_3 \quad (3-23)$$

La derivada del momento cinético relativa al sistema intermedio “3” es:

$$\left. \frac{d\vec{L}^G}{dt} \right|_3 = I_X \dot{\omega}_X \vec{i}_3 + I_Y \dot{\omega}_Y \vec{j}_3 + I_Z \dot{\omega}_Z \vec{k}_3 \quad (3-24)$$

Por otro lado:

$$\vec{\omega}_{31} \times \vec{L}^G = (I_Z \omega_Z \omega_Y - I_X \omega_Y \omega_X \operatorname{tg} \theta) \vec{i}_3 + (I_X \omega_X^2 \operatorname{tg} \theta - I_Z \omega_Z \omega_X) \vec{j}_3 \quad (3-25)$$

Agrupando términos:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} \Big|_{\text{"1"}} = & [I_X \dot{\omega}_X + I_Z \omega_Z \omega_Y - I_X \omega_Y \omega_X \operatorname{tg} \theta] \vec{i}_3 + [I_X \dot{\omega}_Y \\ & + I_X \omega_X^2 \operatorname{tg} \theta - I_Z \omega_Z \omega_X] \vec{j}_3 + I_Z \dot{\omega}_Z \vec{k}_3 \end{aligned} \quad (3-26)$$

Escribiendo (3-9) por componentes:

$$\begin{aligned} M_X^G &= \mu B_Y \\ M_Y^G &= -\mu B_X \\ M_Z^G &= 0 \end{aligned} \quad (3-27)$$

Donde las componentes del campo con subíndice en mayúsculas indican el sistema intermedio "3", que son:

$$B_X = B_x \cos \theta + B_y \sin \theta \sin \phi - B_z \sin \theta \cos \phi \quad (3-28)$$

$$B_Y = B_y \cos \phi + B_z \sin \phi \quad (3-29)$$

Igualando las expresiones por componente y despejando las derivadas temporales, queda:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_X &= \mu(B_y \cos \phi + B_z \sin \theta) + \omega_X \omega_Y \operatorname{tg} \theta - \frac{I_Z}{I_X} \omega_Z \omega_Y \operatorname{tg} \theta \\ \dot{\omega}_Y &= -\mu(B_x \cos \theta + B_y \sin \phi \sin \theta - B_z \sin \theta \cos \phi) - \omega_X^2 \operatorname{tg} \theta + \frac{I_Z}{I_X} \omega_X \omega_Z \\ \dot{\omega}_Z &= 0 \end{aligned} \quad (3-30)$$

De aquí se deduce que ω_Z es una constante del movimiento. En los desarrollos posteriores se supondrá que $\omega_Z = \Omega$, conocida, que equivale a decir que la velocidad de rotación propia del dipolo está dada por la velocidad inicial que se le transmite y se mantiene constante, ya que no se han tenido en cuenta efectos disipativos.

Esto implica, además, que la coordenada ψ es una coordenada cíclica, cuya ecuación diferencial viene dada por:

$$\dot{\psi} = \omega_X - \Omega \operatorname{tg} \theta \quad (3-31)$$

Como se ve examinando el sistema completo, la ecuación (3-31) está desacoplada del resto del problema, por lo que se puede omitir en el sistema de ecuaciones. Una vez resuelto numéricamente el sistema formado por el resto de ecuaciones, se puede obtener la ley horaria $\psi(t)$ sin mas que integrar la ecuación (3-31). En el análisis realizado en este trabajo esta ley carece de interés para la finalidad que se persigue, que es estudiar de manera general la estabilidad del Levitron[®], por lo que no se resolverá la ecuación.

Como se hizo con el movimiento de traslación, la rotación del dipolo también se puede escribir como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Combinando (3-21) y (3-30) e introduciendo la constante del movimiento Ω en las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi} &= \frac{\omega_X}{\operatorname{tg} \theta} \\
 \dot{\theta} &= \omega_Y \\
 \dot{\psi} &= \Omega - \omega_X \operatorname{tg} \theta \\
 \dot{\omega}_X &= \mu(B_y \cos \phi + B_z \operatorname{sen} \theta) + \omega_X \omega_Y \operatorname{tg} \theta - \frac{I_Z}{I_X} \Omega \omega_Y \operatorname{tg} \theta \\
 \dot{\omega}_Y &= -\mu(B_x \cos \theta + B_y \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta - B_z \operatorname{sen} \theta \cos \phi) - \omega_X^2 \operatorname{tg} \theta + \frac{I_Z}{I_X} \Omega \omega_X \\
 \dot{\omega}_Z &= 0
 \end{aligned} \tag{3-32}$$

3.5. Resumen de ecuaciones

Al combinar (3-32) y (3-18) el problema queda como definido a través de un sistema de 12 ecuaciones diferenciales de primer orden, de las cuales una de ellas tiene solución trivial y proporciona una constante del movimiento, Ω , y otra queda desacoplada del resto y sin interés particular en el problema que se está estudiando. A continuación se muestra un sumario del sistema de ecuaciones resultante.

$$\begin{cases}
\dot{x} = & v_x \\
\dot{y} = & v_y \\
\dot{z} = & v_z \\
\dot{v}_x = & -\frac{\mu}{m} \sin \theta \left(-\frac{1}{2} B'_0(z) + \frac{3x^2 + y^2}{16} B_0'''(z) \right) + \frac{\mu}{m} \cos \theta \sin \phi \frac{xy}{8} B_0'''(z) - \\
& -\frac{\mu}{m} \cos \theta \cos \phi \left(-\frac{x}{2} B_0''(z) + \frac{x(x^2 + y^2)}{16} B_0'''(z) \right) \\
\dot{v}_y = & -\frac{\mu}{m} \sin \theta \frac{xy}{8} B_0''' + \frac{\mu}{m} \cos \theta \sin \phi \left(-\frac{1}{2} B'_0(z) + \frac{x^2 + 3y^2}{16} B_0'''(z) \right) - \\
& -\frac{\mu}{m} \cos \theta \cos \phi \left(-\frac{y}{2} B_0''(z) + \frac{y(x^2 + y^2)}{16} B_0'''(z) \right) \\
\dot{v}_z = & -\frac{\mu}{m} \sin \theta \left(-\frac{x}{2} B_0''(z) + \frac{x(x^2 + y^2)}{16} B_0'''(z) \right) \\
& + \frac{\mu}{m} \cos \theta \sin \phi \left(-\frac{y}{2} B_0'(z) + \frac{y(x^2 + y^2)}{16} B_0'''(z) \right) \\
& -\frac{\mu}{m} \cos \theta \cos \phi \left(B'_0(z) - \frac{x^2 + y^2}{4} B_0'''(z) + \frac{(x^2 + y^2)^2}{64} B_0^{(5)}(z) \right) - g \\
\dot{\phi} = & \frac{\omega_X}{\operatorname{tg} \theta} \\
\dot{\theta} = & \omega_Y \\
\dot{\psi} = & \Omega - \omega_X \operatorname{tg} \theta \\
\dot{\omega}_X = & \mu(B_y \cos \phi + B_z \sin \theta) + \omega_X \omega_Y \operatorname{tg} \theta - \frac{I_Z}{I_X} \Omega \omega_Y \operatorname{tg} \theta \\
\dot{\omega}_Y = & -\mu(B_x \cos \theta + B_y \sin \phi \sin \theta - B_z \sin \theta \cos \phi) - \omega_X^2 \operatorname{tg} \theta + \frac{I_Z}{I_X} \Omega \omega_X \\
\dot{\omega}_Z = & 0
\end{cases} \quad (3-33)$$

3.6. Ecuaciones adimensionales

3.6.1. Variables adimensionales

Con el objetivo de escalar las ecuaciones para su posterior resolución numérica, se definirá una escala temporal y de longitudinal para adimensionalizar las ecuaciones. Las variables adimensionales utilizadas se definen a continuación.

$$x^* = \frac{x}{a} \quad y^* = \frac{y}{a} \quad z^* = \frac{z}{a} \quad (3-34)$$

$$t^* = \frac{t}{t_0} \quad (3-35)$$

$$v_x^* = v_x \frac{t_0}{a} \quad v_y^* = v_y \frac{t_0}{a} \quad v_z^* = v_z \frac{t_0}{a} \quad (3-36)$$

$$\dot{\phi}^* = \frac{\dot{\phi}}{t_0} \quad \dot{\theta}^* = \frac{\dot{\theta}}{t_0} \quad \dot{\psi}^* = \frac{\dot{\psi}}{t_0} \quad (3-37)$$

$$\omega_X^* = \frac{\omega_X}{t_0} \quad \omega_Y^* = \frac{\omega_Y}{t_0} \quad \omega_Z^* = \frac{\omega_Z}{t_0} \quad (3-38)$$

$$\dot{\omega}_X^* = \frac{\dot{\omega}_X}{t_0^2} \quad \dot{\omega}_Y^* = \frac{\dot{\omega}_Y}{t_0^2} \quad \dot{\omega}_Z^* = \frac{\dot{\omega}_Z}{t_0^2} \quad (3-39)$$

$$B^* = \frac{B}{B_u} \quad (3-40)$$

Donde se han utilizado las siguientes escalas para las medidas del campo magnético y el tiempo:

$$t_0 = \sqrt{\frac{a}{g}} \quad B_u = \frac{A}{a} \quad (3-41)$$

Además, se utilizarán los siguientes parámetros adimensionales que caracterizan el problema:

$$\beta = \frac{\mu B_u}{mga} \quad \delta = \frac{ma^2}{I_X} \quad \lambda = \frac{I_Z}{I_X} \quad (3-42)$$

Al no conocer los valores exactos de las inercias de la peonza, se utilizará la aproximación del disco presentada en el capítulo 2. Así, $\delta \approx 16$ y $\lambda \approx 2$ en todas las simulaciones numéricas que vendrán a continuación.

3.6.2. Ecuaciones adimensionales

$$\left\{ \begin{array}{lcl}
 \dot{x}^* & = & v_x^* \\
 \dot{y}^* & = & v_y^* \\
 \dot{z}^* & = & v_z^* \\
 \dot{v}_x^* & = & -\beta \sin \theta \left(-\frac{1}{2} B_0^{*'}(z) + \frac{3x^{*2} + y^{*2}}{16} B_0^{*'''}(z) \right) + \beta \cos \theta \sin \phi \frac{x^* y^*}{8} B_0^{*'''}(z) - \\
 & & -\beta \cos \theta \cos \phi \left(-\frac{x^*}{2} B_0^{*''}(z) + \frac{x^*(x^{*2} + y^{*2})}{16} B_0^{*'''}(z) \right) \\
 \dot{v}_y^* & = & -\beta \sin \theta \frac{x^* y^*}{8} B_0^{*'''}(z) + \beta \cos \theta \sin \phi \left(-\frac{1}{2} B_0^{*'}(z) + \frac{x^{*2} + 3y^{*2}}{16} B_0^{*'''}(z) \right) - \\
 & & -\beta \cos \theta \cos \phi \left(-\frac{y^*}{2} B_0^{*''}(z) + \frac{y^*(x^{*2} + y^{*2})}{16} B_0^{*'''}(z) \right) \\
 \dot{v}_z^* & = & -\beta \sin \theta \left(-\frac{x^*}{2} B_0^{*''}(z) + \frac{x^*(x^{*2} + y^{*2})}{16} B_0^{*'''}(z) \right) \\
 & & + \beta \cos \theta \sin \phi \left(-\frac{y^*}{2} B_0^{*'}(z) + \frac{y^*(x^{*2} + y^{*2})}{16} B_0^{*'''}(z) \right) \\
 & & -\beta \cos \theta \cos \phi \left(B_0^{*'}(z) - \frac{x^{*2} + y^{*2}}{4} B_0^{*'''}(z) + \frac{(x^{*2} + y^{*2})^2}{64} B_0^{*5)}(z) \right) - 1 \\
 \dot{\phi}^* & = & \frac{\omega_X^*}{\operatorname{tg} \theta} \\
 \dot{\theta}^* & = & \omega_Y^* \\
 \dot{\psi}^* & = & \Omega^* - \omega_X^* \operatorname{tg} \theta \\
 \dot{\omega}_X^* & = & \beta \delta (B_y \cos \phi + B_z \sin \theta) + \omega_X^* \omega_Y^* \operatorname{tg} \theta - \lambda \Omega^* \omega^* \operatorname{tg} \theta \\
 \dot{\omega}_Y^* & = & -\beta \delta (B_x \cos \theta + B_y \sin \phi \sin \theta - B_z \sin \theta \cos \phi) - \omega_X^{*2} \operatorname{tg} \theta + \lambda \Omega^* \omega_X^* \\
 \dot{\omega}_Z^* & = & \Omega^*
 \end{array} \right. \quad (3-43)$$

En lo que sigue a continuación se utilizarán únicamente las variables adimensionales. Por comodidad en la escritura, se omitirá la notación específica, utilizándose la misma que para las variables dimensionales. La nomenclatura utilizada para las unidades es: UL para referirse a las unidades longitudinales y UT para unidades temporales.

4 SISTEMA LINEALIZADO

En este capítulo se tratará el estudio del sistema linealizado en torno a una posición de equilibrio estático. Se linealizará el sistema de ecuaciones diferenciales deducido en (3-43) en torno a una posición de equilibrio vertical. Una vez deducida la región de equilibrio vertical, se estudiará la región de equilibrio horizontal, en función de los parámetros β y Ω . Posteriormente, se representarán gráficamente las frecuencias naturales que conforman el movimiento oscilatorio del sistema lineal y se representarán gráficamente las soluciones para cada una de las mismas, para diferentes valores de los parámetros del sistema.

4.1. Región de equilibrio vertical

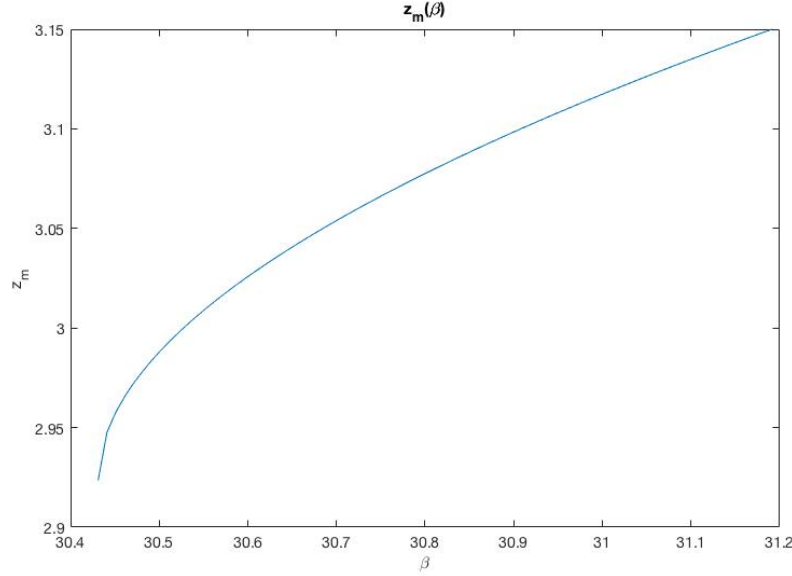
Supongamos que el dipolo se encuentra perfectamente alineado con el eje OZ de la base magnetizada. En este caso la energía potencial se escribe, en su forma adimensional:

$$U = z + \beta B_0(z) \quad (4-1)$$

En este caso existe un punto en el eje vertical z_m , tal que la energía potencial del dipolo presenta un mínimo en la dirección vertical. El valor de β para que exista un mínimo en el punto z_m viene dado por:

$$\frac{dU}{dz} = 0 \rightarrow \beta = -\frac{1}{B'_0(z_m)} \quad (4-2)$$

En la Figura 4.1 se puede ver una representación gráfica de cómo varía la posición del punto de equilibrio vertical en función del valor del parámetro β .

Figura 4.1 $z_m(\beta)$

Como se ve en la Figura 1.7, la energía presenta un mínimo más profundo al crecer β , por existirá un mínimo valor de z_m y β tal que exista un punto de inflexión horizontal en lugar de un mínimo. Este punto viene dado por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dz} = 0 \\ \frac{d^2U}{dz^2} = 0 \end{cases} \quad (4-3)$$

La solución de este sistema es $z_m^{min} = 2.9235$ UL y $\beta^{min} = 30.4311$. Este valor está intrínsecamente relacionado con la masa del dipolo, resultando que el valor del ratio m/μ no debe superar el valor de $9.8877 \cdot 10^4$ g/mm²A. Además, la altura mínima, en unidades dimensionales es 7.308 cm. Por debajo de esta altura no se podría conseguir la levitación estable.

Las conclusiones deducidas de este estudio son las siguientes. Por un lado, se sabe que el valor de β viene fijado por el punto en el que la energía potencial encuentra un mínimo en z_m (o viceversa) por la relación (4-2), e indica el ratio entre la masa del dipolo y su momento dipolar. Por otro, se ha deducido por la solución del sistema (4-3) que para que exista equilibrio en, al menos, la dirección vertical es necesario que $z_m > 2.9235$, implicando su valor de β correspondiente. Mientras mas grande sea el valor de z_m mayor será la “profundidad” del mínimo, por lo que la región de equilibrio vertical es mayor.

Llegados a este punto es necesario aclarar, que la estabilidad vertical no implica que el dipolo sea estable en todas direcciones ya que la estabilidad completa implicaría que existiese un mínimo en todas direcciones, lo que tendría que satisfacer la condición:

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = 0 \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} > 0 \quad (4-4)$$

Haciendo uso de la formulación dada hasta este punto, no se puede asegurar que (4-4) se cumpla. En lo que sigue a continuación, se linearizarán las ecuaciones en torno al punto de equilibrio vertical, con el objetivo de estudiar la estabilidad en las direcciones restantes.

4.2. Linealización del sistema de ecuaciones

El punto de equilibrio estático tiene las siguientes coordenadas:

$$x_0 = 0 \quad y_0 = 0 \quad z_0 = z_m \quad \phi_0 = 0 \quad \theta_0 = 0 \quad v_{x_0} = 0 \quad v_{y_0} = 0 \quad v_{z_0} = 0 \quad \omega_{X_0} = 0 \quad \omega_{Y_0} = 0 \quad (4-5)$$

Así, si suponemos que las variaciones de las variables respecto a su posición de equilibrio son pequeñas, se aplicará un desarrollo de Taylor de primer orden alrededor del punto de equilibrio. Sea $\vec{x} = (x, y, z, \phi, \theta, v_x, v_y, v_z, \omega_X, \omega_Y)$ el vector que define las variables de estado del sistema, y $f(\vec{x})$ una función dependiente de las mismas, se tiene que:

$$f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y_0} (y - y_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{z_0} (z - z_0) + (\dots) \quad (4-6)$$

Aplicando el procedimiento descrito en (4-6) el sistema queda:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & v_x \\ \dot{y} & = & v_y \\ \dot{z} & = & v_z \\ \dot{v}_x & = & -\frac{1}{2}\theta + \frac{S}{2}x \\ \dot{v}_y & = & \frac{1}{2}\phi + \frac{S}{2}y \\ \dot{v}_z & = & -S(z - z_m) \\ \dot{\phi} & = & \omega_X \\ \dot{\theta} & = & \omega_Y \\ \dot{\omega}_X & = & -\lambda\Omega\omega_Y + \frac{\delta}{2}y + \delta B\phi \\ \dot{\omega}_Y & = & \lambda\Omega\omega_X - \frac{\delta}{2}x + \delta B\theta \end{array} \right. \quad (4-7)$$

Donde, de la condición de mínimo relativo en la ecuación de la energía potencial del sistema, el valor de β queda fijado como $\beta = -1/B'_0(z_m)$. Con el objeto de simplificar el sistema, se introducen los siguientes parámetros:

$$S = \beta B''_0(z_m) = -\frac{B''_0}{B'_0}(z_m) \quad B = \beta B_0(z_m) = -\frac{B_0}{B'_0}(z_m) \quad (4-8)$$

En el sistema anterior se han omitido las ecuaciones de ψ y ω_Z . Como se vio en el capítulo anterior, la coordenada ψ está desacoplada del resto del problema y para obtener su ley horaria bastaría con integrar su expresión, dada en (3-31), una vez resuelto el resto del sistema. Por otra parte, esta coordenada no tiene especial implicación en el objetivo del trabajo, por lo que se omitirá su resolución. En cuanto a ω_Z ya se ha demostrado que es una constante del movimiento y se denominará como Ω .

4.2.1. Desacoplamiento

Hay que destacar, que en la aproximación lineal aquí descrita, el movimiento vertical se desacopla del horizontal, y viene dado por un movimiento armónico simple de ecuación

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + Sz = 0 \quad (4-9)$$

y cuya frecuencia natural viene dada por: $\omega_{vert} = \pm\sqrt{S}$. Este movimiento se da cuando, inicialmente, el dipolo se encuentra completamente alineado con el eje OZ . En el resto de situaciones el dipolo oscilará armónicamente en la dirección vertical al tiempo que se desplaza en la horizontal y cambia su orientación. Por tanto, si nos centramos en el movimiento horizontal desacoplado, sistema bajo estudio se puede reducir a un sistema lineal de 8 ecuaciones con 8 incógnitas.

$$\begin{cases} \dot{x} &= v_x \\ \dot{y} &= v_y \\ \dot{v}_x &= -\frac{1}{2}\theta + \frac{S}{2}x \\ \dot{v}_y &= \frac{1}{2}\phi + \frac{S}{2}y \\ \dot{\phi} &= \omega_X \\ \dot{\theta} &= \omega_Y \\ \dot{\omega}_X &= -\lambda\Omega\omega_Y + \frac{\delta}{2}y + \delta B\phi \\ \dot{\omega}_Y &= \lambda\Omega\omega_X - \frac{\delta}{2}x + \delta B\theta \end{cases} \quad (4-10)$$

Que en forma matricial se puede escribir como:

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{A} \cdot \vec{x}(t) \quad (4-11)$$

Y cuya solución puede escribirse de la forma

$$x_n(t) = C_n e^{\lambda_n t} \vec{v}_n \quad (4-12)$$

Donde C_n , λ_n y v_n representan constantes a determinar por las condiciones iniciales del problema y los autovalores y autovectores de la matriz A , respectivamente.

4.3. Estabilidad horizontal.

Como se ha visto, al linealizar el sistema los movimientos en el eje vertical y en el plano se desacoplan, siendo el movimiento vertical un m.a.s. de ecuación conocida. Es decir, un dipolo sin girar que se encontrase perfectamente alineado con el eje de la base imantada, y en las condiciones adecuadas, se mantendría en equilibrio estable y se movería con un m.a.s. ante pequeñas perturbaciones (verticales). Sin embargo, este concepto por si mismo no explica la levitación del Levitron[®], ya que se necesita que exista estabilidad en la dirección radial. En otras palabras, debe existir un mecanismo que haga que la peonza se resista a volcar, y tienda a alinear el dipolo con el campo para causar el equilibrio de fuerzas en el eje vertical. Como se dice en [7], el efecto giroscópico deber ser el responsable de que la peonza esté siempre alineada con el campo magnético, de manera que la energía potencial se puede escribir (en forma adimensional):

$$U = z + \beta |\vec{B}| \quad (4-13)$$

Para que exista estabilidad en todas direcciones es necesario que se cumplan las condiciones

$$\frac{\partial^2 |\vec{B}|}{\partial x^2} > 0 \quad \frac{\partial^2 |\vec{B}|}{\partial y^2} > 0 \quad \frac{\partial^2 |\vec{B}|}{\partial z^2} > 0 \quad (4-14)$$

O lo que es lo mismo, la energía potencial debe tener curvatura positiva en todas direcciones en su mínimo para que exista una región estable. No basta con considerar únicamente la condición descrita en el apartado 4.1. de equilibrio vertical.

4.3.1. Región de estabilidad lineal

Para que exista estabilidad lineal el movimiento del dipolo debe ser puramente oscilatorio. Si tomamos el sistema de ecuaciones dado en (4-7), la matriz asociada debe tener autovalores imaginarios con parte real nula. Como se ve, la matriz de coeficientes depende de z_m y de la velocidad de giro Ω . La región de estabilidad lineal puede definirse como la zona del plano z_m - Ω en el que los autovalores cumplen esta condición.

La región de estabilidad lineal se muestra en la Figura 4.2. Para su representación se ha utilizado el software de cálculo numérico MATLAB[®], mediante el cual se ha hecho un barrido en las dos variables z_m y Ω , y se han determinado los puntos en los que la matriz asociada al sistema de ecuaciones solo tiene autovalores complejos.

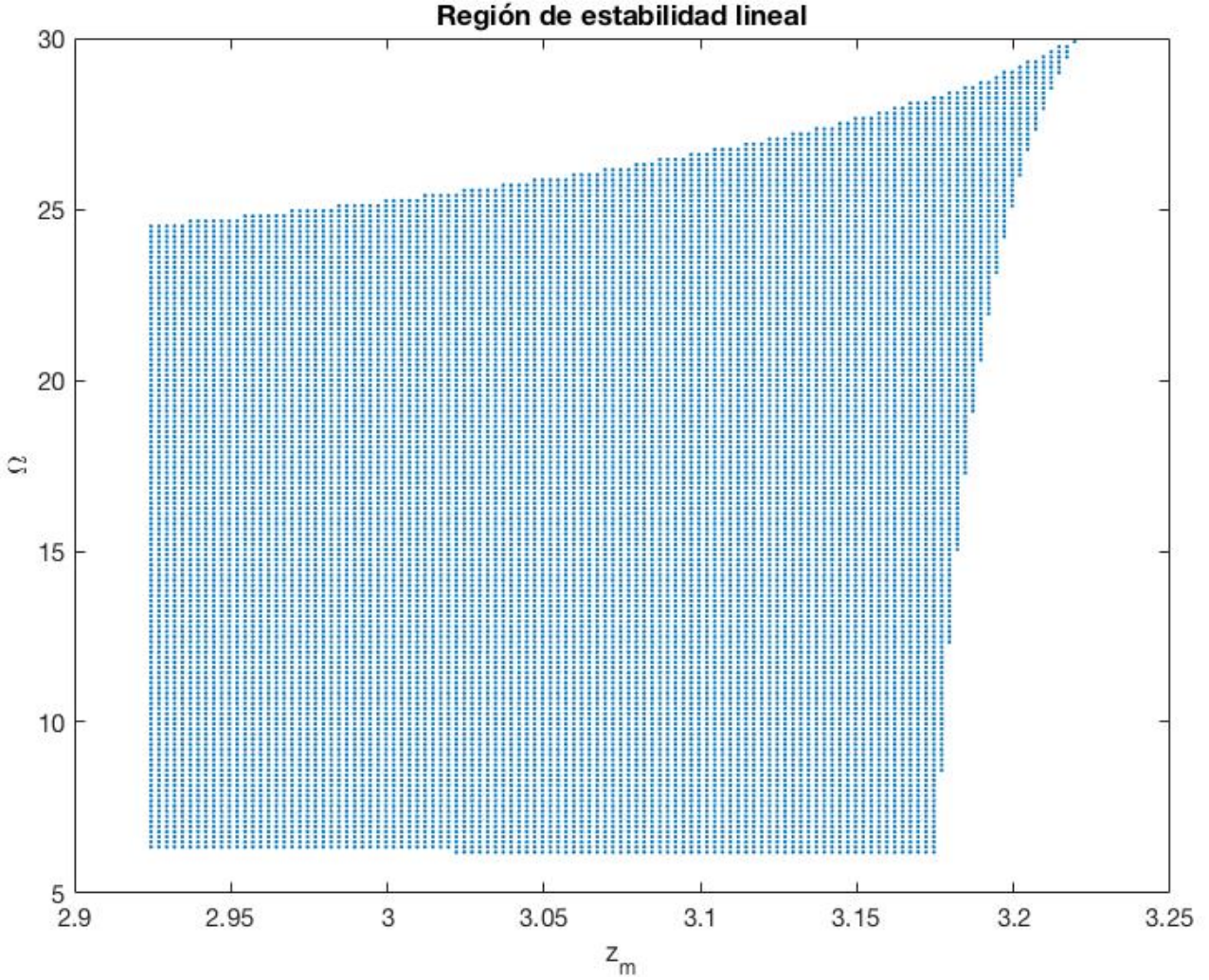


Figura 4.2. *Región de estabilidad lineal. Plano z_m - Ω .*

En la región se puede observar que existe un límite inferior en $z_m = 2.9235$ UL correspondiente con la condición de equilibrio vertical (4-3). También, existe un límite superior en torno a $z_m \approx 3.2$ UL, que correspondería a la estabilidad horizontal. La región de posible levitación es muy estrecha, en unidades dimensionales, se da para alturas entre 7.31 cm y 8.05 cm. En cuanto a la velocidad de rotación, esta encuentra un límite inferior, para $\Omega_{min}^* \approx 6.2$, que decrece levemente cuando z_m aumenta. La naturaleza de este límite es obvia. El efecto estabilizador de la peonza por medio del efecto giroscópico es proporcional a la velocidad de giro propio. Cuando ésta se hace demasiado pequeña, la peonza se hace inestable frente los giros de precesión, lo que hace que la fuerza magnética apunte hacia abajo, volcando la peonza. El límite superior es más difícil de ver de forma natural. Si la peonza se gira demasiado rápido, su eje se hace más resistente a los cambios de dirección en la precesión, por lo que la fuerza magnética no puede cambiar de dirección a la velocidad requerida para la levitación. Este límite se hace mas grande a medida que aumenta la altura z_m y está en torno a $\Omega_{max}^* \approx 26$. En unidades dimensionales, esto se traduce que el giro de la peonza debe estar entre $\Omega_{min} \approx 1.9$ r.p.s y $\Omega_{max} \approx 7.6$ r.p.s. [8]

No hay que olvidar sin embargo, que el parámetro que controlamos al poner la peonza a girar es su masa por medio de la adición de pequeñas arandelas, y que la altura de levitación z_m viene fijada por la misma y no al contrario. Sin embargo se ha considerado conveniente representarla en primer lugar por ser más visual que el parámetro correspondiente a la masa β . No obstante, resulta interesante también, mostrar la región de estabilidad en el plano $\beta - \Omega$.

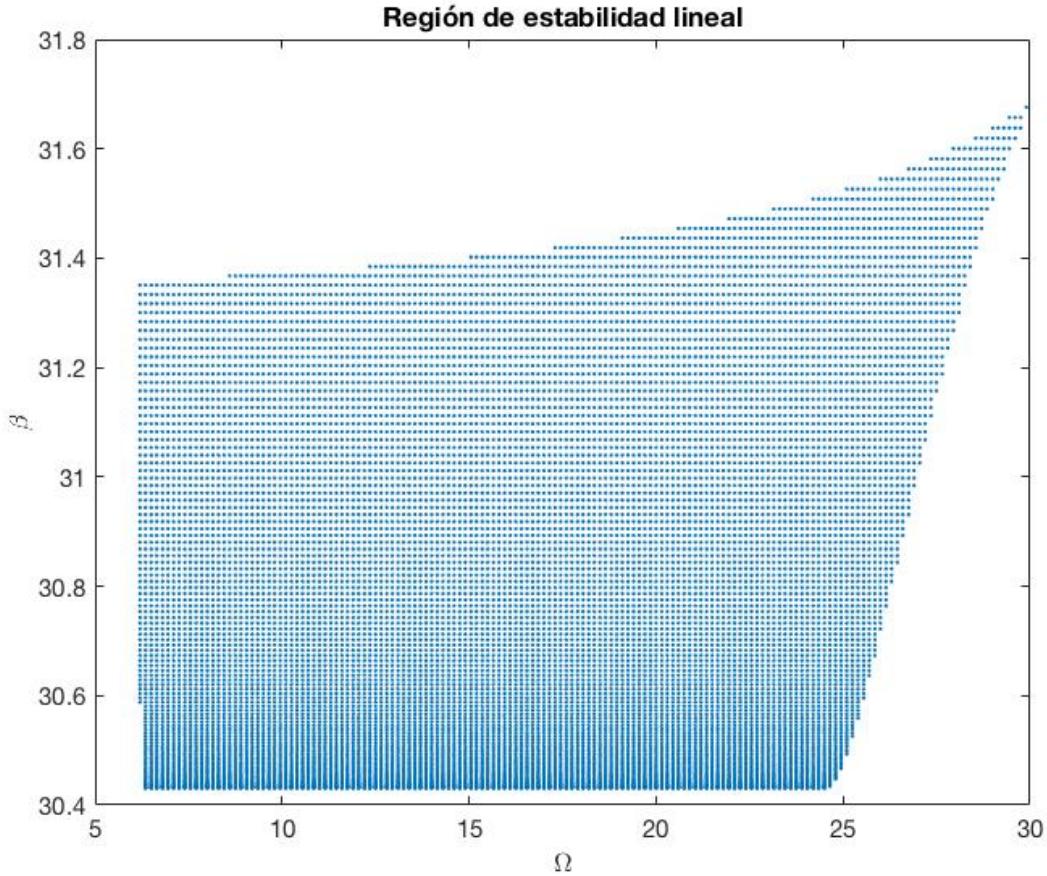


Figura 4.3 *Región de estabilidad lineal. Plano Ω - β .*

Se puede deducir de la Figura 4.3, que existe un mínimo valor del parámetro β , o visto de otra forma, para el ratio μ/m , también dado por la condición de equilibrio vertical (4-3) en $\beta = 30.4$, y un máximo creciente con Ω en torno a $\beta \approx 31.5$. Si suponemos que el resto de parámetros permanecen constantes al variar la masa, la tolerancia de masa admisible para la peonza es:

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{m_{max} - m_{min}}{m_{max}} \approx \frac{1/\beta_{min} - 1/\beta_{max}}{1/\beta_{min}} \approx 3.5\% \quad (4-15)$$

La tolerancia es muy estrecha, por lo que una pequeña variación de masa es suficiente para salir de la zona de estabilidad lineal y hacer imposible la levitación. Además, para los valores de z_m estables, la “profundidad” del mínimo en la energía potencial del sistema es muy pequeña, por lo que nos encontraríamos en una región muy sensible a las perturbaciones. En la Figura 4.4 se muestra el mínimo de la energía potencial para un valor de $z_m = 3.1$ UL.

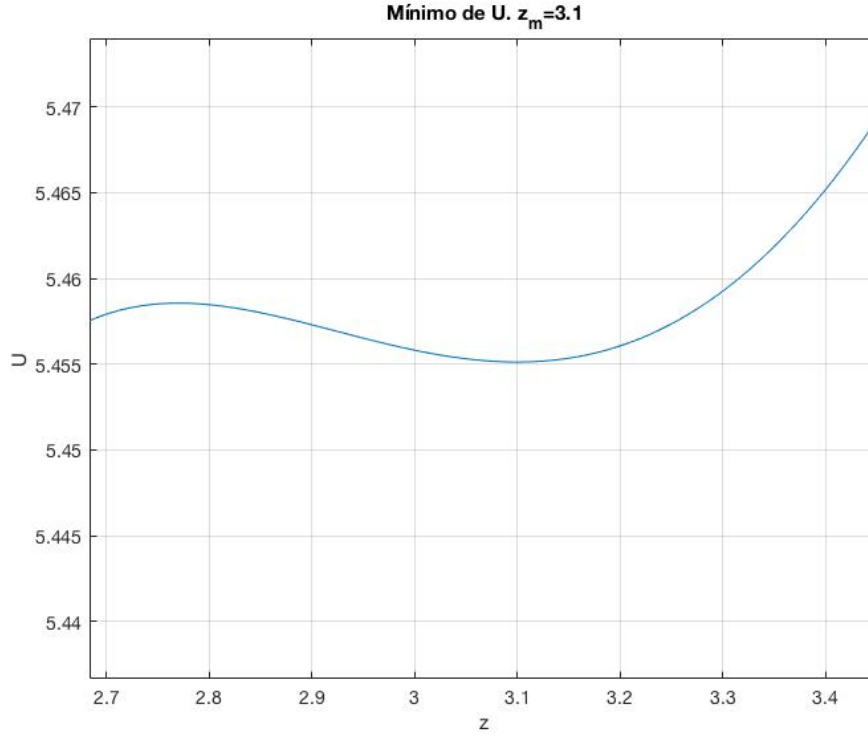


Figura 4.4 *Mínimo en la energía potencial. $z_m = 3.1$ UL.*

Se puede observar que el “ancho” del mínimo es muy pequeño, siendo solo $\Delta z \approx 0.51$ UL y $\Delta U \approx 0.004$, por lo que una mínima perturbación, tal que una pequeña ráfaga de aire, haría que el dipolo saliese de la zona estable y la peonza volcase.

4.4. Soluciones del sistema lineal.

Una vez se ha estudiado en detalle la región de estabilidad lineal, se trata ahora de estudiar las soluciones que conforman el sistema de 8 ecuaciones. Se estudiará el movimiento en el plano horizontal, y la proyección del dipolo con el eje OZ , dada por

$$\vec{\eta} = \vec{k}_1 \times (\vec{k}_3 \times \vec{k}_1) = \vec{k}_3 - (\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_3) \hat{k}_1 = \sin \theta \vec{i}_1 - \cos \theta \sin \phi \vec{j}_1 \approx \theta \vec{i}_1 - \phi \vec{j}_1 \quad (4-16)$$

Y la proyección del dipolo sobre el campo.

$$\begin{aligned} \vec{\xi} &= \frac{\vec{B} \times (\vec{k}_3 \times \vec{B})}{B_0^2} = B_0^2 \vec{k}_3 - (B \cdot \vec{k}_3) \cdot B \cong B_0^2 \vec{k}_3 - B_0 B = \\ &= \left(B^2 \theta + BK \frac{x}{2} \right) \vec{i}_1 + (-B^2 \phi + BK) \vec{j}_1 \end{aligned} \quad (4-17)$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & v_x \\ \dot{y} & = & v_y \\ \dot{v}_x & = & -\frac{1}{2}\theta + \frac{S}{2}x \\ \dot{v}_y & = & \frac{1}{2}\phi + \frac{S}{2}y \\ \dot{\phi} & = & \omega_X \\ \dot{\theta} & = & \omega_Y \\ \dot{\omega}_X & = & -\lambda\Omega\omega_Y + \frac{\delta}{2}y + \delta B\phi \\ \dot{\omega}_Y & = & \lambda\Omega\omega_X - \frac{\delta}{2}x + \delta B\theta \end{array} \right. \quad (4-18)$$

4.4.1. Expresión analítica de las soluciones

Al tratarse de un sistema lineal, las soluciones tienen la forma general dada en (4-12), y dado que nos encontramos dentro de la región de estabilidad, los autovalores asociados a la matriz son complejos con parte real nula. Por tanto, las soluciones se pueden escribir como la suma de una combinación lineal de funciones trigonométricas para cada uno de las cuatro parejas de autovectores complejos conjugados, $\lambda_i = \pm j\omega_i$.

Partiendo de una solución de la forma

$$x = x_0 \cos \omega t \quad y = y_0 \sin \omega t \quad (4-19)$$

Y derivando

$$v_x = -\omega x_0 \sin \omega t \quad y = \omega y_0 \cos \omega t \quad (4-20)$$

Derivando de nuevo y despejando

$$\theta = (2\omega^2 + S)x_0 \cos(\omega t) \quad \phi = -(2\omega^2 + S)y_0 \sin(\omega t) \quad (4-21)$$

Se tiene que el vector de proyección sobre el eje OZ $\vec{\eta} = \theta \vec{i}_1 - \phi \vec{j}_1$ es proporcional al movimiento del dipolo en el plano XY . Esto quiere decir que el dipolo orbita circularmente alrededor del centro de la base, y el movimiento de precesión está contenido en la superficie de un cono.

Derivando otra vez y sustituyendo en las dos últimas ecuaciones del sistema

$$\begin{aligned} \left((\omega^2 + \delta B)(2\omega^2 + S) - \frac{\delta}{2} \right) y_0 &= \lambda\Omega\omega(2\omega^2 + S)x_0 \\ \left((\omega^2 + \delta B)(2\omega^2 + S) - \frac{\delta}{2} \right) x_0 &= \lambda\Omega\omega(2\omega^2 + S)y_0 \end{aligned} \quad (4-22)$$

Dividiendo una ecuación por la otra se llega a

$$x = \pm y_0 \quad (4-23)$$

Por lo que se puede concluir que las órbitas son circulares de radio r , velocidad $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ y velocidad angular de precesión $\omega_P = \sqrt{\omega_X^2 + \omega_Y^2}$ constantes en todo el movimiento.

El factor que hace que el giro del dipolo sea contrario o a favor de la rotación propia es

$$\Delta = (\omega^2 + \delta B)(2\omega^2 + S) - \frac{\delta}{2} \quad (4-24)$$

Si tomamos $x_0 = +y_0$ en (4-22), llegamos a la ecuación característica de los autovalores del sistema (frecuencias naturales):

$$(\omega^2 + \delta B)(2\omega^2 + S) - \frac{\delta}{2} = \lambda \Omega \omega (2\omega^2 + S) \quad (4-25)$$

De esta ecuación de cuarto grado podemos calcular los cuatro autovalores de la matriz asociada.

Para completar la base de las soluciones, a cada solución de la forma dada en (4-19), le corresponde una como

$$x = -x_0 \sin(\omega t) \quad y = x_0 \cos(\omega t) \quad (4-26)$$

Por lo que la solución del sistema para todas las variables se puede escribir como:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^4 (\vec{a}_i \cos(\omega_i t) - \vec{b}_i \sin(\omega_i t)) \quad (4-27)$$

4.4.2. Caracterización de los modos normales

Una vez se ha deducido la forma de las soluciones, se pasará a estudiar numéricamente los autovalores y su dependencia con los parámetros del sistema, z_m y Ω . Sin embargo, antes de proceder con el estudio numérico es necesario introducir la forma en la que se van a caracterizar cada una de las soluciones.

La matriz asociada tiene 4 parejas de autovalores complejos conjugados con parte real nula asociados, de la forma:

$$\lambda_{1,2} = \pm j\omega_1 \quad \lambda_{3,4} = \pm j\omega_2 \quad \lambda_{5,6} = \pm j\omega_3 \quad \lambda_{7,8} = \pm j\omega_4 \quad (4-28)$$

A cada frecuencia natural le corresponde una pareja de autovectores complejos conjugados, que corresponde con las condiciones iniciales del problema para excitar cada modo normal. Aunque los autovectores son complejos aquí solo consideraremos indistintamente la parte real o la imaginaria de los mismos, considerando que el dipolo se encuentra inicialmente en el eje OX y con un cierto ángulo de inclinación inicial θ_0 . Sería equivalente decir que el dipolo está en el eje OY inclinado un ángulo $-\phi_0$ debido a la simetría circular del problema.

Como los autovectores tienen un grado de libertad, se tomará como parámetro el ángulo de inclinación inicial θ_0 . Para caracterizar cada modo y compararlos entre sí, se estudiará el caso en el que el dipolo esté inclinado con $\theta_0 = 1^\circ$. De esta forma se podrán comparar el radio de las órbitas de cada uno de los modos normales. Por tanto, las condiciones iniciales correspondientes a cada modo son de la forma:

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \\ v_{y_0} \\ 0 \\ 1 \\ \omega_{X_0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4-29)$$

Donde sabemos que $v_{y_0} = x_0 \omega$.

4.4.3. Variación de las frecuencias naturales frente a los parámetros

Resolviendo numéricamente mediante MATLAB[®] la ecuación característica dada en (4-25) se obtienen las cuatro frecuencias naturales del sistema. A continuación se muestran dichas frecuencias frente a la velocidad de giro propio, para un valor de $z_m = 3.1$ UL.

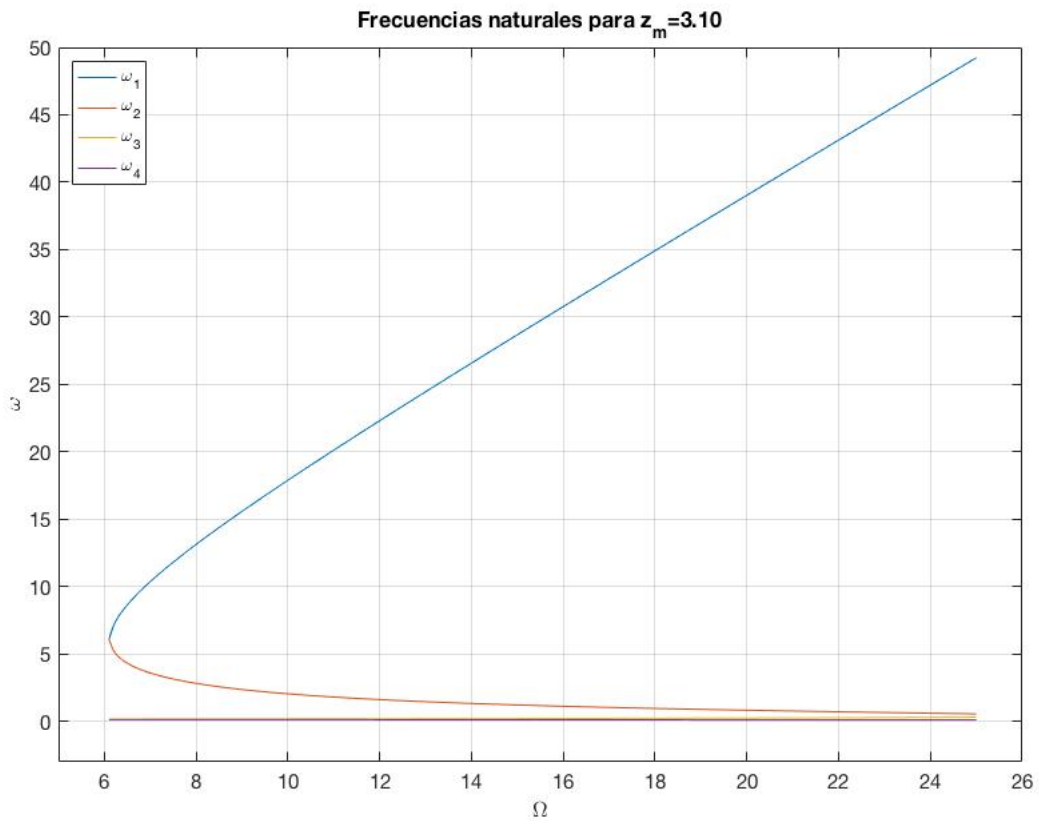


Figura 4.5 Frecuencias naturales frente a Ω .

En la Figura 4.5 se pueden distinguir las cuatro frecuencias naturales del sistema. Estas frecuencias se corresponden con los cuatro modos normales, ordenados de mayor a menor frecuencia natural:

- Modo 1, con frecuencia ω_1 , en azul.
- Modo 2, con frecuencia ω_2 , en rojo.
- Modo 3, con frecuencia ω_3 , en amarillo.
- Modo 4, con frecuencia ω_4 , en morado.

Se ve que existe un modo mucho más rápido del resto, con frecuencias del orden de $30\text{-}40 \text{ (UT)}^{-1}$ que decrecen a medida que lo hace la velocidad de giro propio, mientras que el segundo modo (ω_2) tiene el comportamiento contrario, hasta llegar al punto en la frontera de estabilidad en el que se acoplan para velocidades de rotación propia muy pequeñas. A continuación se muestra un detalle de los modos mas lentos, ω_3 y ω_4 .

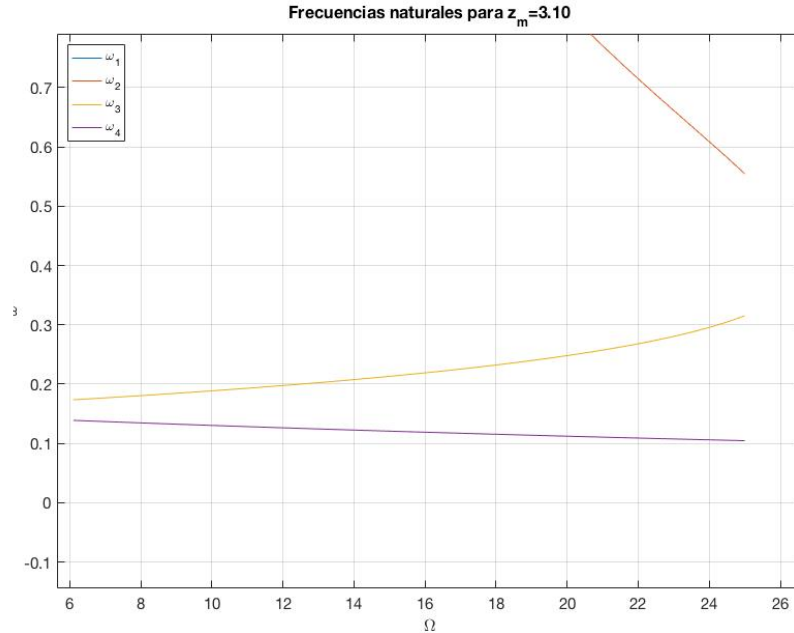


Figura 4.6 *Detalle modos 3 y 4.*

Las frecuencias de estos dos últimos modos son del mismo orden, aunque tienen comportamientos diferentes frente a Ω . La frecuencia ω_3 crece con Ω hasta que se acopla con ω_2 en la frontera de la región estable.

La dependencia con z_m varía dependiendo de cada frecuencia natural. Las siguientes figuras muestran como varían cada una de las frecuencias con respecto a ambos parámetros.

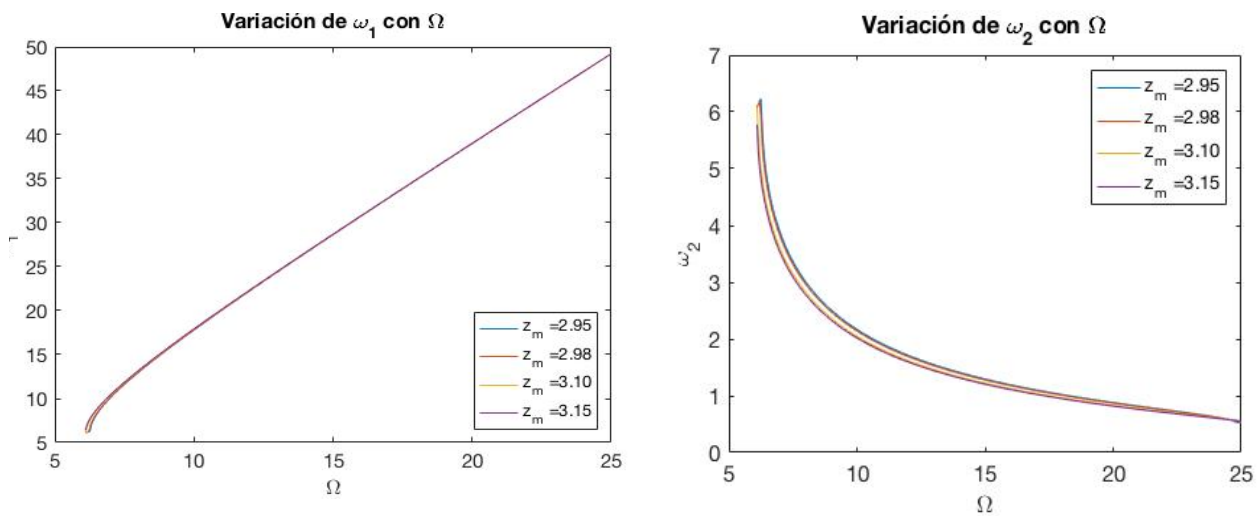


Figura 4.7 *Variación de ω_1 y ω_2 frente a Ω para distintos z_m .*

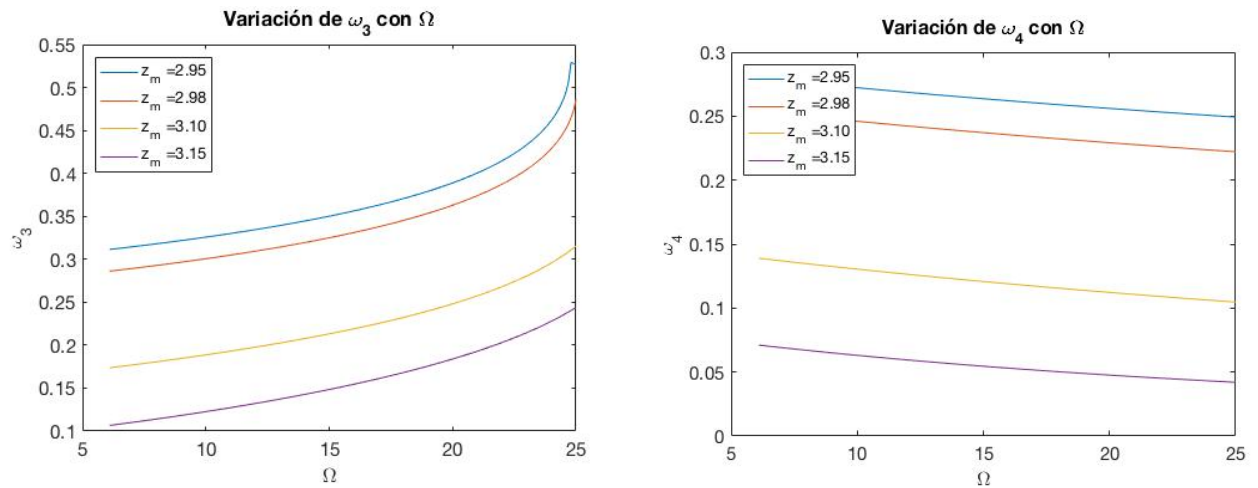


Figura 4.8 Variación de ω_3 y ω_4 frente a Ω para distintos z_m .

4.4.4. Variación de x_0 y ω_X frente a los parámetros

En las siguientes figuras se muestra el radio de las órbitas circulares para los distintos modos.

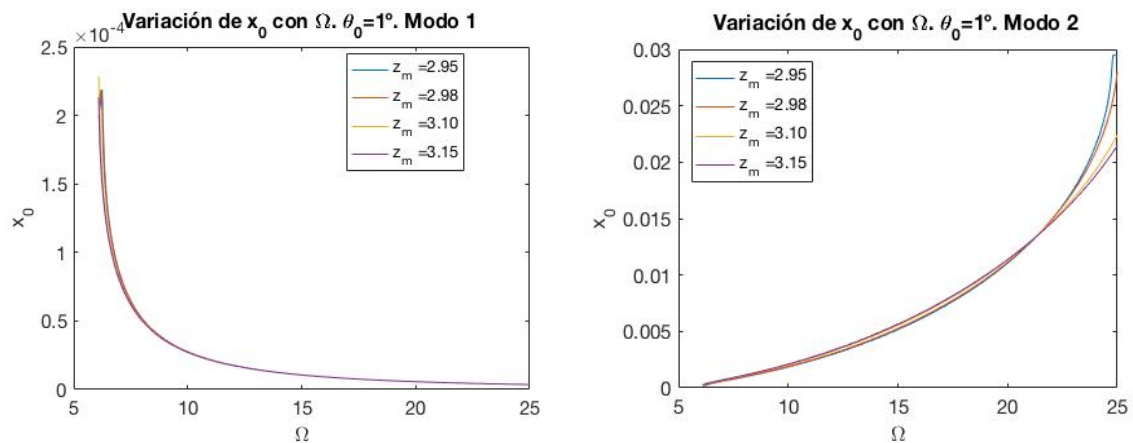


Figura 4.9 Variación de x_0 frente a Ω para distintos z_m . Modos 1 y 2.

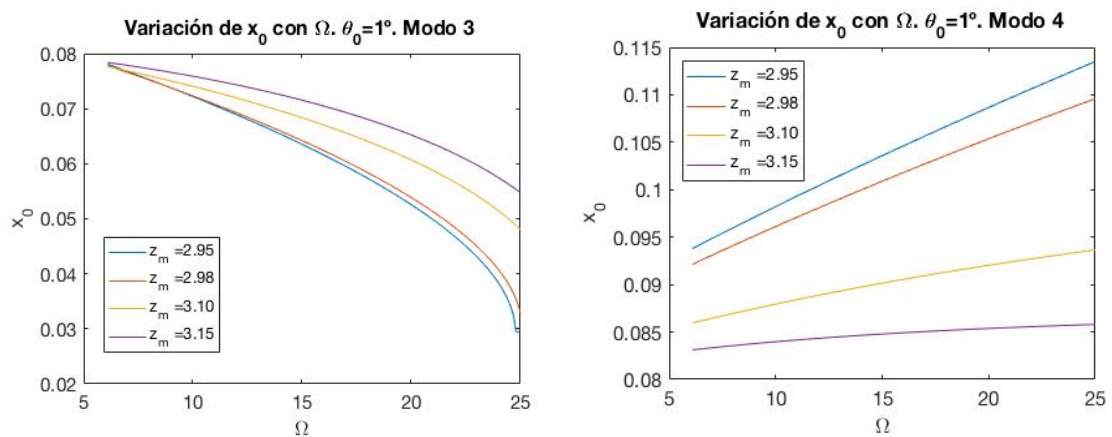


Figura 4.10 Variación de x_0 frente a Ω para distintos z_m . Modos 3 y 4.

Para el modo de precesión rápida (modo 1), el dipolo se encuentra muy cercano al eje OZ , disminuyendo esta distancia a medida que aumenta la velocidad de rotación propia. Se puede apreciar que la dependencia con β (o lo que es equivalente z_m) es casi nula. La tendencia de los modos 2 y 4 es la contraria, al incrementar Ω crece el radio de las órbitas. También, se puede apreciar que los modos más lentos, 3 y 4, están mas alejados del eje OX y la dependencia con z_m es mas pronunciada. Como tendencia general, podemos decir que el radio de la órbita crece de manera inversa a la frecuencia, siendo mayor para los modos mas lentos.

En las siguientes figuras se muestra la variación de la velocidad de precesión inicial ω_{X_0} .

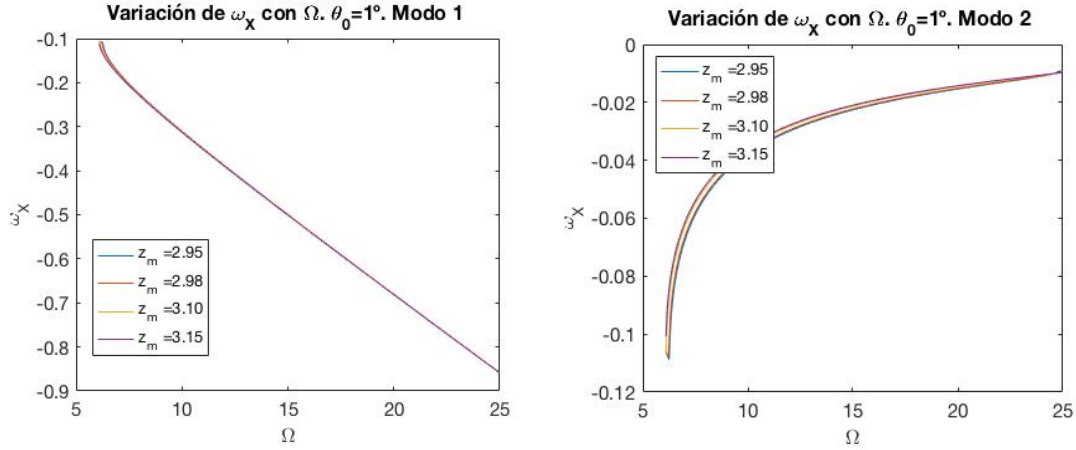


Figura 4.11 Variación de ω_{X_0} frente a Ω para distintos z_m . Modos 1 y 2

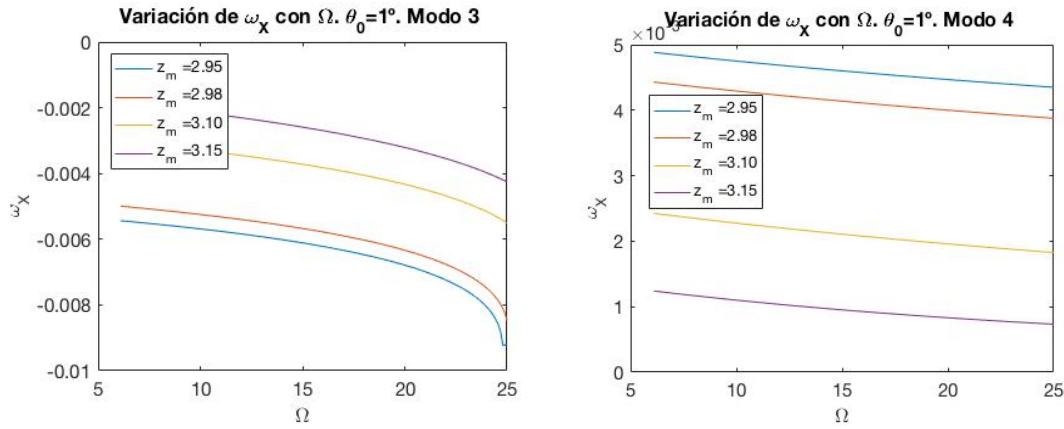


Figura 4.12 Variación de ω_{X_0} frente a Ω para distintos z_m . Modos 3 y 4

Exceptuando el modo mas lento, todos presentan $\omega_{X_0} < 0$, lo que indica precesión en la misma dirección que la rotación propia del dipolo. Al igual que con el alejamiento horizontal, la dependencia con z_m solo es apreciable para los dos modos lentos.

El cuarto modo, con frecuencia natural mas lenta, presenta giro retrogrado para todos los valores de z_m dentro de la región de estabilidad, lo que quiere decir que gira alrededor del eje OZ en sentido contrario al giro propio. Por tanto, para este modo el parámetro $\Delta < 0$ y las condiciones iniciales $v_{y_0} < 0$ y $\omega_{X_0} > 0$.

4.5. Resumen de conceptos

Se ha visto en el desarrollo de este capítulo, que si suponemos que el dipolo permanece muy cercano a la posición de equilibrio vertical, se puede linealizar el sistema en torno a la misma. A continuación se expone un resumen de los conceptos y conclusiones extraídas de este análisis.

- La condición de estabilidad vertical no es única para garantizar la levitación estable de la peonza, si no que hace falta una condición más en cuanto a la curvatura de la energía potencial en la dirección radial (4-14). Esto se traduce a que el sistema linealizado sea puramente oscilatorio, con autovalores complejos puros.
- Existe una región muy estrecha de estabilidad lineal en la que se cumplen las condiciones para posibilitar la levitación estable, mostrada en las Figuras 4-2 y 4-3.
- En sistema linealizado se desacopla el movimiento oscilatorio vertical y el horizontal, estando este último definido por un sistema lineal de 8 ecuaciones.
- Las soluciones del sistema lineal son orbitas circulares resultantes de combinaciones lineales de cuatro modos naturales de vibración. Los modos naturales de vibración presentan las siguientes características, ordenados por la magnitud de su frecuencia natural asociada (autovalores).
 - Modo 1. Modo con frecuencia de giro alrededor de OZ muy rápida y con ángulo de inclinación y separación horizontal pequeños. El movimiento de precesión es en el mismo sentido que el de giro propio ($\Delta > 0$).
 - Modo 2. Frecuencia mucho más lenta y radio de las orbitas moderado. Movimiento de precesión en el mismo sentido ($\Delta > 0$).
 - Modo 3. Mas lento y separado del eje OZ . Presenta también precesión en el mismo sentido que rotación propia ($\Delta > 0$).
 - Modo 4. Es el modo más lento y alejado del eje vertical. La precesión se realiza en sentido contrario a la rotación propia ($\Delta < 0$).

4.6. Simulación numérica

A continuación se muestran los resultados de la simulación numérica para los valores de $z_m = 3.1$ UL y $\Omega = 18 \text{ UT}^{-1}$ tomando como ángulo de inclinación $\theta_0 = 1^\circ$. Para estos datos, $\beta = 30.9079$. En la siguiente tabla se recogen, para cada uno de los modos naturales: la frecuencia natural ω , la velocidad de la órbita en el plano v , el radio de la órbita r y la velocidad de precesión ω_P .

Tabla 4-1. Resultados de la simulación numérica para $z_m = 3.1$ UL y $\Omega = 18 \text{ UT}^{-1}$

<i>Modo</i>	$\omega \text{ [UT}^{-1}\text{]}$	$v \text{ [UL/UT]}$	$r \text{ [UL]}$	$\omega_P \text{ [UT}^{-1}\text{]}$
1	34.921028	0.000249	0.000007	-0.609487
2	0.962225	0.008329	0.008656	-0.016794
3	0.232261	0.014885	0.064086	-0.004054
4	0.115514	-0.010548	0.091311	0.002016

En la siguiente figura se muestra una comparación de los radios de las órbitas para los distintos modos. Como se puede apreciar, las diferencias entre los modos más lentos y los más rápidos es bastante pronunciada.

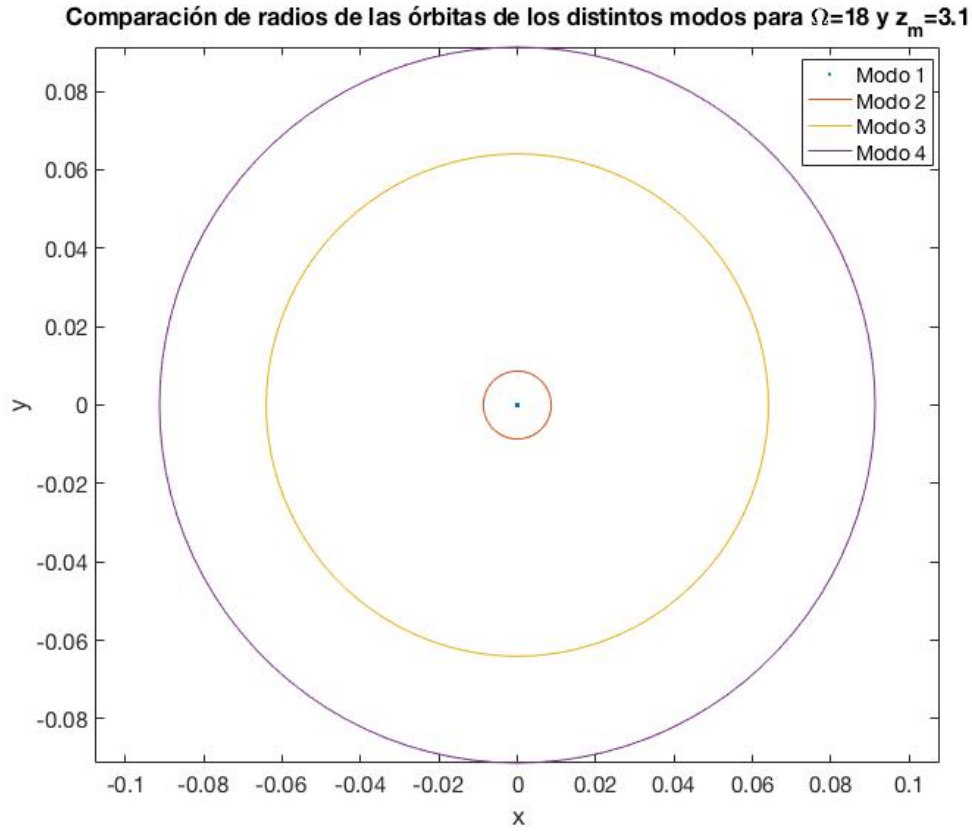


Figura 4.13. *Radios de las órbitas para $z_m = 3.1$ UL y $\Omega = 18$ UT¹*

5 SISTEMA COMPLETO

En este capítulo se resolverán las ecuaciones del sistema de ecuaciones diferenciales completo (3-43) y se estudiará el comportamiento del sistema para diferentes condiciones iniciales. Primeramente, se tomarán las correspondientes a los modos naturales, aumentando progresivamente el ángulo de inclinación θ_0 de la peonza. De esta forma se observará como a medida que este aumenta, se produce un acoplamiento con el resto de frecuencias naturales. Es necesario aclarar que en sistema completo el movimiento vertical y el horizontal no están desacoplados, por lo que la peonza oscila verticalmente al mismo tiempo que orbita en torno al eje OZ .

Posteriormente, se definirá la frontera de la región de estabilidad no lineal, definida mediante el máximo ángulo de inclinación θ_0^{max} que puede tener el dipolo para conseguir una levitación estable, sin volcar.

Por último, se estudiarán los casos en los que las condiciones iniciales no correspondan a un modo en concreto, si no que puedan expresarse como combinación lineal de los mismos. Algunos ejemplos de estas situaciones se dan cuando el dipolo esta alineado con OZ y $\theta_0 = 0$, o cuando se encuentra separado una cierta distancia x_0 y paralelo a OZ .

5.1. Exploración de los modos en el Sistema completo

En el sistema linealizado, la forma de las soluciones para cada uno de los modos permanecen invariables con respecto a la amplitud de las condiciones iniciales del problema (en otras palabras, la inclinación θ_0). Esto quiere decir que las órbitas permanecerán siempre circulares y el movimiento será puramente horizontal independientemente de cuán inclinada se encuentre la peonza. Como caso extremo, se podría planear que el dipolo tuviese una inclinación de $\theta_0 = 180^\circ$ y aún así se diese el movimiento, lo que carece de sentido físico. Al utilizar las ecuaciones en su forma completa, aparece un acoplamiento con el resto de modos a medida que aumentamos la inclinación del dipolo y las órbitas dejan de ser puramente circulares, al mismo tiempo que aparece una oscilación vertical.

En este apartado se resolverán las ecuaciones en forma completa, utilizando la aproximación del campo magnético dada en (2-18) y (2-19). Para la expresión del campo en el eje, se utilizará el desarrollo de Taylor dado en (2-23), (2-24) y (2-25). En este análisis se obviarán ciertas variables del sistema de ecuaciones por carecer de interés. Principalmente, se estudiará la evolución temporal de la posición de la peonza, tanto en el plano OXY como en el eje vertical OZ , así como la inclinación del eje del dipolo con respecto al eje OZ (mediante la proyección del vector \vec{k}_3 en el plano) y el ángulo formado con respecto al campo magnético \vec{B} . Las expresiones de estos parámetros son las dadas en (5-1) y (5-2) respectivamente.

$$\vec{\xi} = \sin \theta \vec{i}_1 - \cos \theta \sin \phi \vec{j}_1 \quad (5-1)$$

$$\eta = \arccos \left(\frac{B_x \sin \theta - B_y \cos \theta \sin \phi + B_z \cos \theta \cos \phi}{|\vec{B}|} \right) \quad (5-2)$$

A continuación se tomarán como condiciones iniciales del problema las correspondientes a los modos naturales para el caso $z_m = 3.1$ UL y $\Omega = 18$ UT⁻¹. Se irá aumentando progresivamente su amplitud (medida a través de la inclinación θ_0) con el objetivo de identificar el acoplamiento de los diferentes modos.

5.1.1 Modo 1

Se muestran a continuación los resultados correspondientes al primer modo, cuya frecuencia natural es $\omega_1 = 34.9210$ UT⁻¹.

5.1.1.1 Soluciones para $\theta_0 = 0.5^\circ$

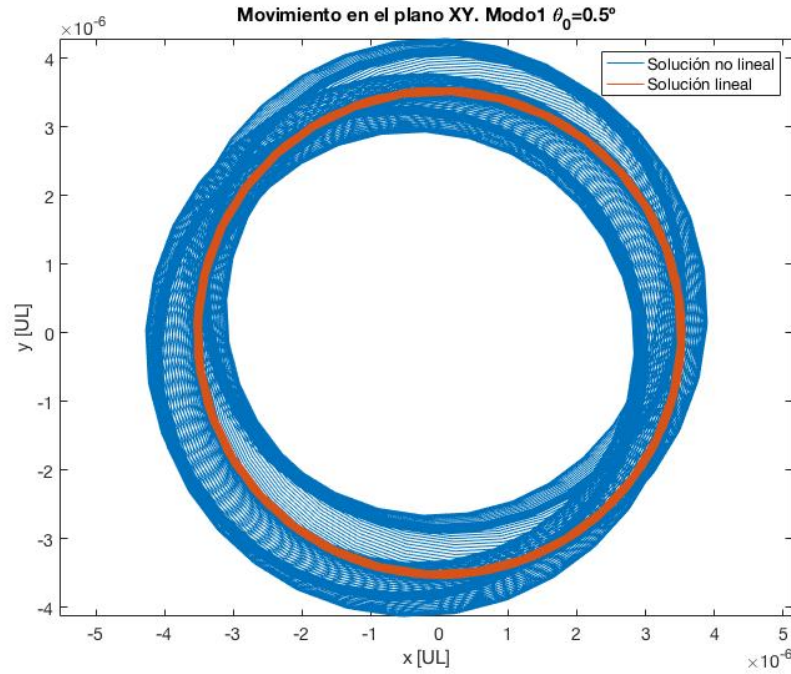


Figura 5.1 *Movimiento en el plano XY. Modo 1. $\theta_0 = 0.5^\circ$*

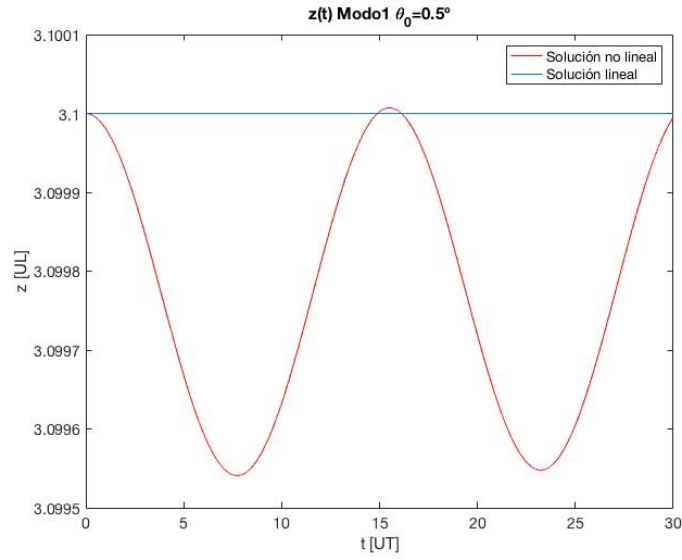


Figura 5.2 *Movimiento en el eje OZ. Modo 1. $\theta_0 = 0.5^\circ$*

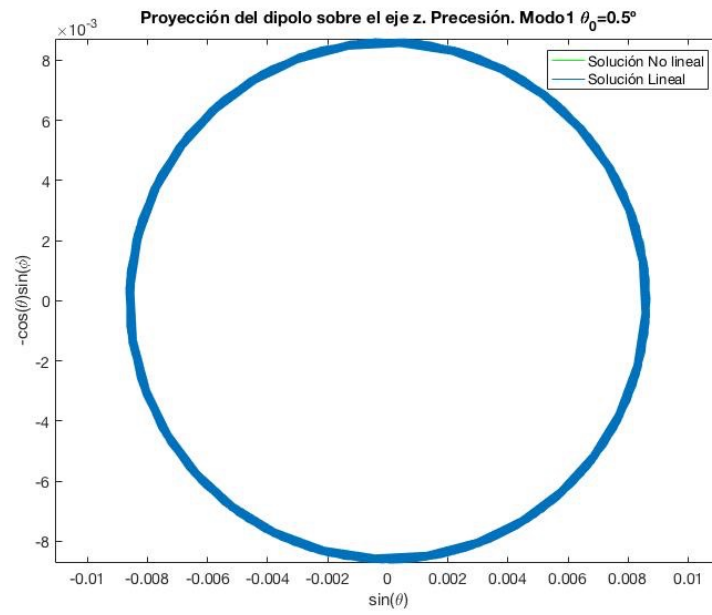


Figura 5.3 *Proyección del dipolo sobre plano OXY. Modo 1. $\theta_0 = 0.5^\circ$*

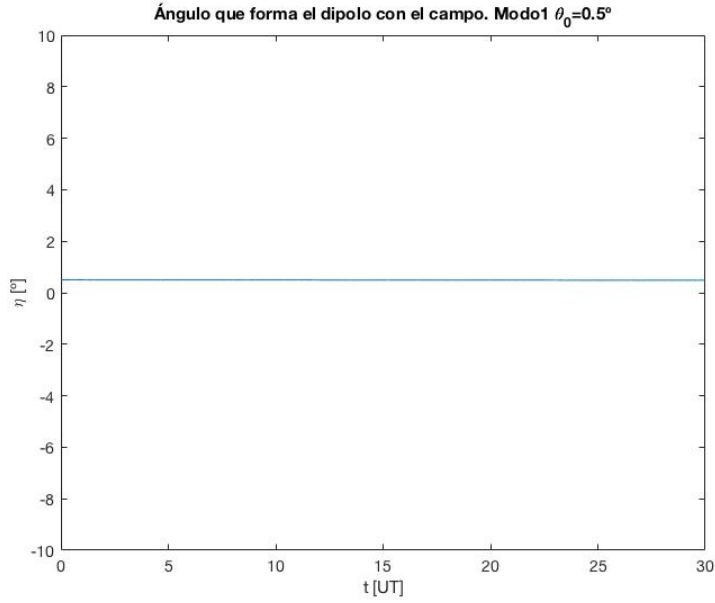


Figura 5.4 *Ángulo que forma el dipolo con el campo. Modo 1. $\theta_0 = 0.5^\circ$*

Se puede observar que, a ángulos de inclinación muy bajos, no se produce apenas acoplamiento con el resto de modos. También, cabe mencionar que el ángulo que forma el dipolo con el campo permanece constante durante el movimiento e igual a θ_0 .

5.1.1.2 Soluciones para $\theta_0 = 2^\circ$

Para $\theta_0 = 2^\circ$ las órbitas dejan de ser puramente circulares, y aparece un movimiento en forma de espiral al mismo tiempo que el dipolo orbita circularmente sobre un hipotético eje OZ local.

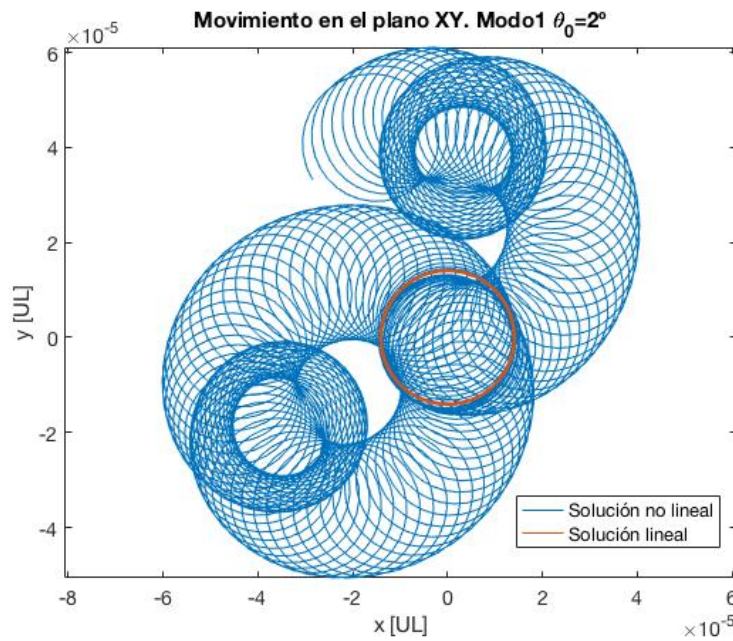


Figura 5.5 *Movimiento en el plano XY. Modo 1. $\theta_0 = 2^\circ$*

También, se acentúa la oscilación vertical del dipolo.

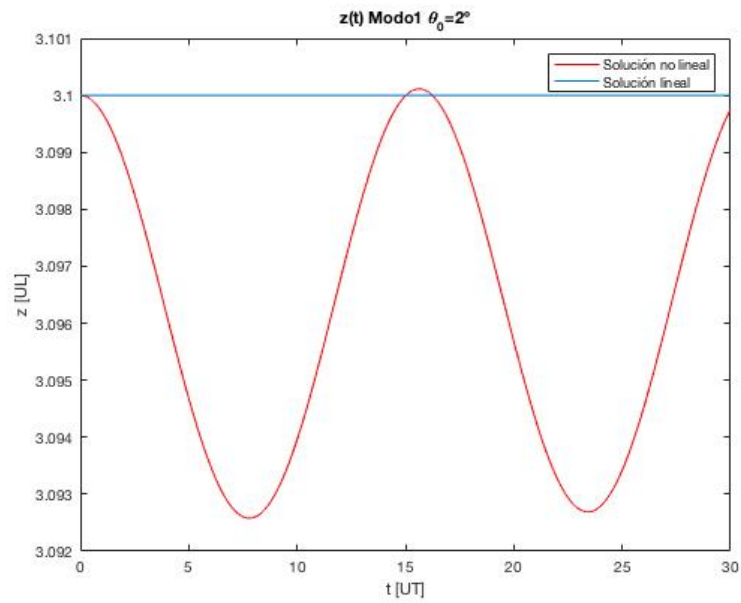


Figura 5.6 *Movimiento vertical. Modo 1. $\theta_0 = 2^\circ$*

Por otra parte, el movimiento de precesión de la peonza sigue manteniendo una órbita circular al igual que en el caso lineal. En cuanto al ángulo que forma el dipolo con el campo, se sigue manteniendo constante e igual a θ_0 .

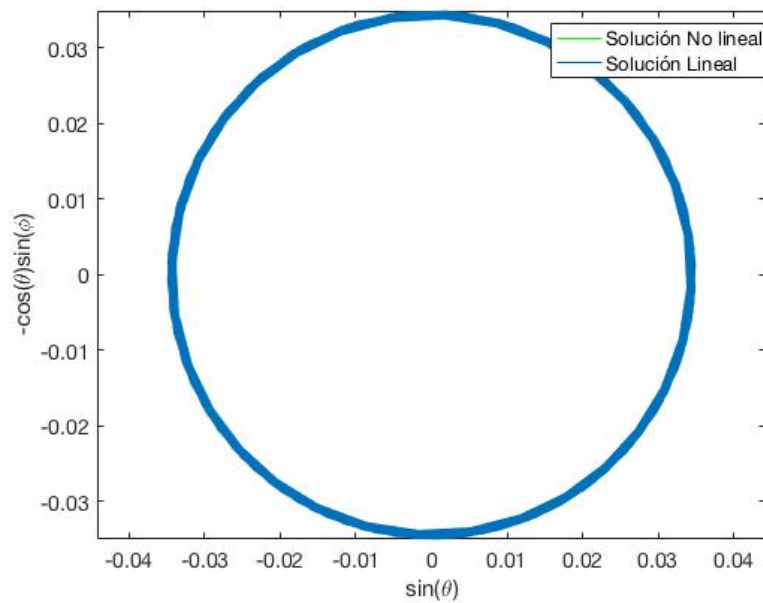


Figura 5.7 *Proyección del dipolo sobre el plano OXY. Modo 1. $\theta_0 = 2^\circ$*

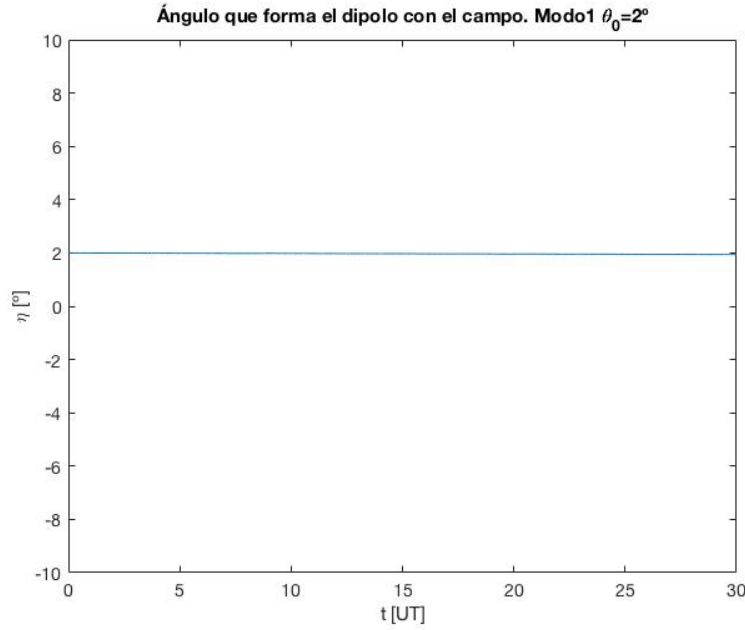


Figura 5.8 *Ángulo que forma el dipolo con el campo. Modo 1. $\theta_0 = 2^\circ$*

5.1.1.3 Soluciones para $\theta_0 = 7^\circ$

Para $\theta_0 = 7^\circ$ el movimiento horizontal se convierte en un movimiento más caótico, al mismo tiempo que la amplitud de las oscilaciones verticales se hace mayor. En las Figuras 5.9 y 5.10 se muestran sendos movimientos, junto con una representación tridimensional en la Figura 5.11. Por otro lado, el ángulo que forma el dipolo con el campo sigue siendo constante e igual a θ_0 y el movimiento de precesión puramente circular.

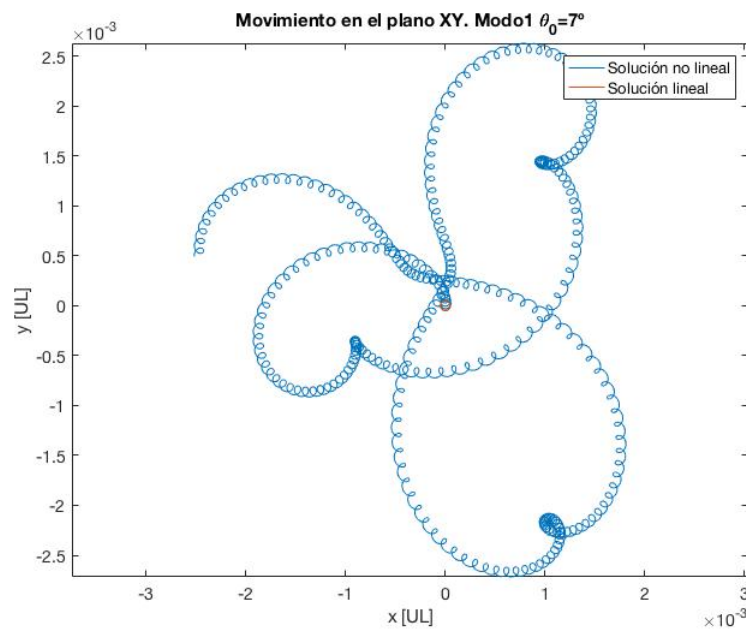


Figura 5.9 *Movimiento en el plano XY. Modo 1. $\theta_0 = 7^\circ$*

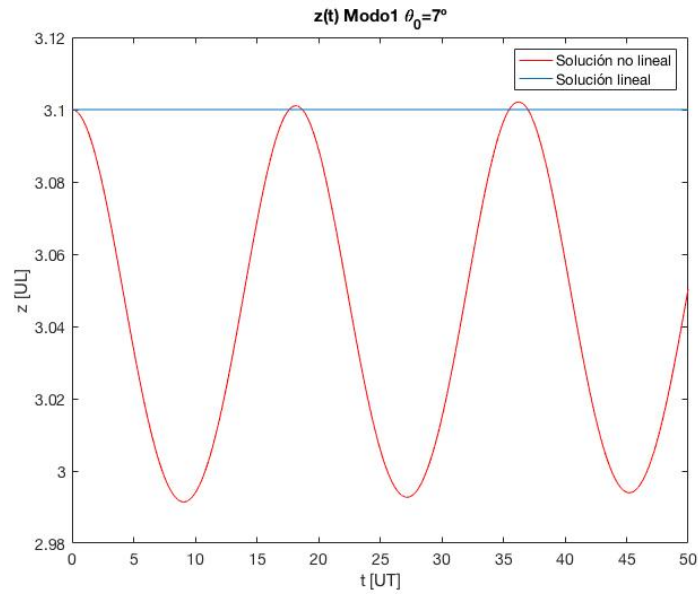


Figura 5.10 *Movimiento vertical. Modo 1. $\theta_0 = 7^\circ$*

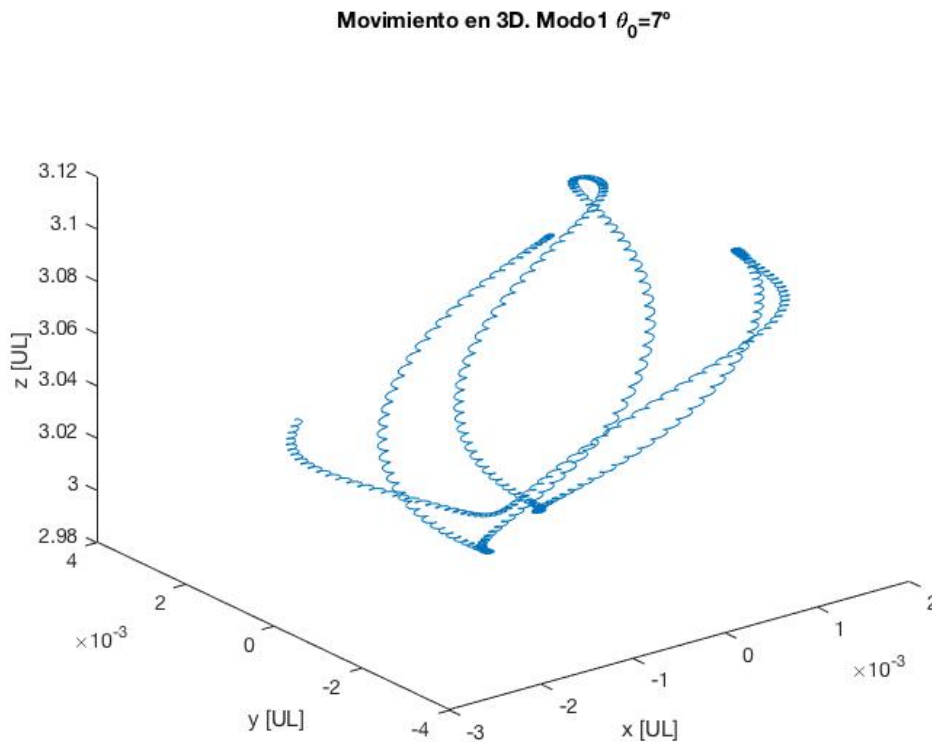


Figura 5.11 *Movimiento en tres dimensiones. Modo 1. $\theta_0 = 7^\circ$*

En este caso la concordancia de la simulación numérica con la realidad es discutible. A ángulos tan inclinados el dipolo se volvería inestable rápidamente. La inestabilidad se puede ver afectada por el uso de una aproximación en el campo magnético, y a distancias alejadas del eje OZ, el error es considerablemente alto.

5.1.2 Modo 2

Se muestran a continuación los resultados correspondientes al segundo modo, cuya frecuencia natural es $\omega_2 = 0.9622 \text{ UT}^{-1}$. Cabe destacar, que para este modo natural, las oscilaciones verticales se realizan por encima de la posición equilibrio, al contrario que en el primer modo que se realizaban por debajo de esta.

5.1.2.1 Soluciones para $\theta_0 = 2^\circ$

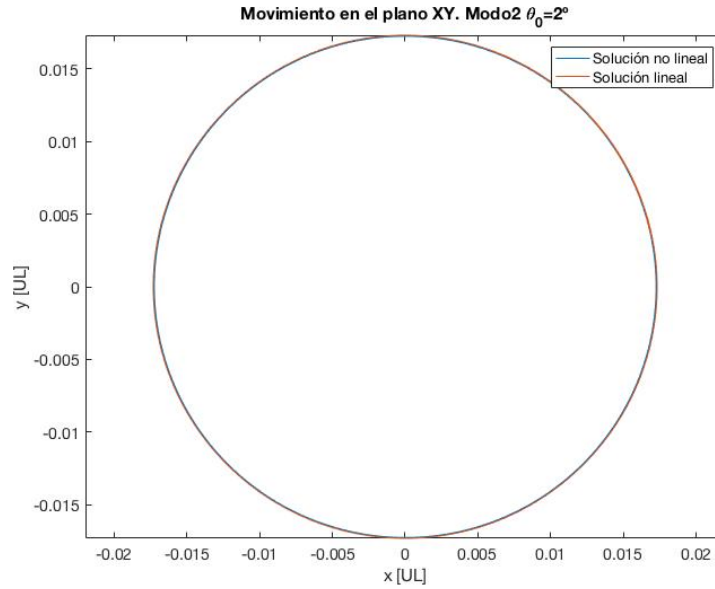


Figura 5.12 *Movimiento en el plano XY. Modo 2. $\theta_0 = 2^\circ$*

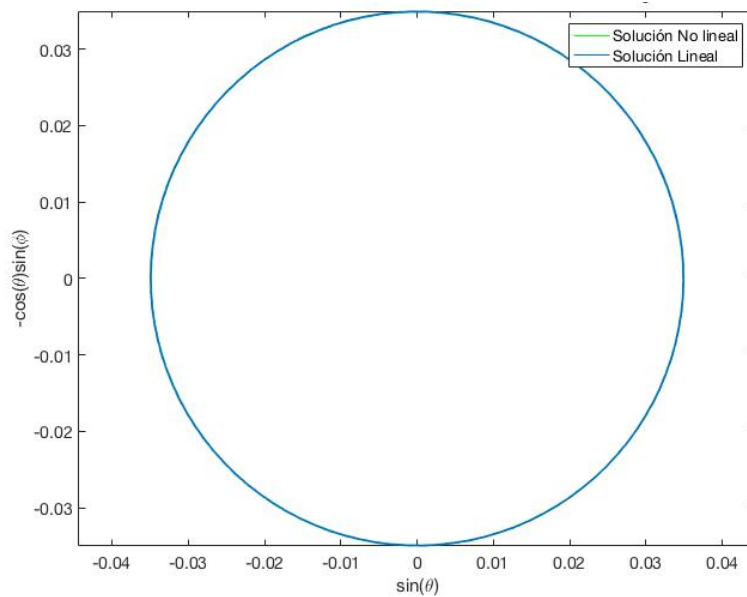


Figura 5.13 *Movimiento de precesión. Modo 2. $\theta_0 = 2^\circ$*

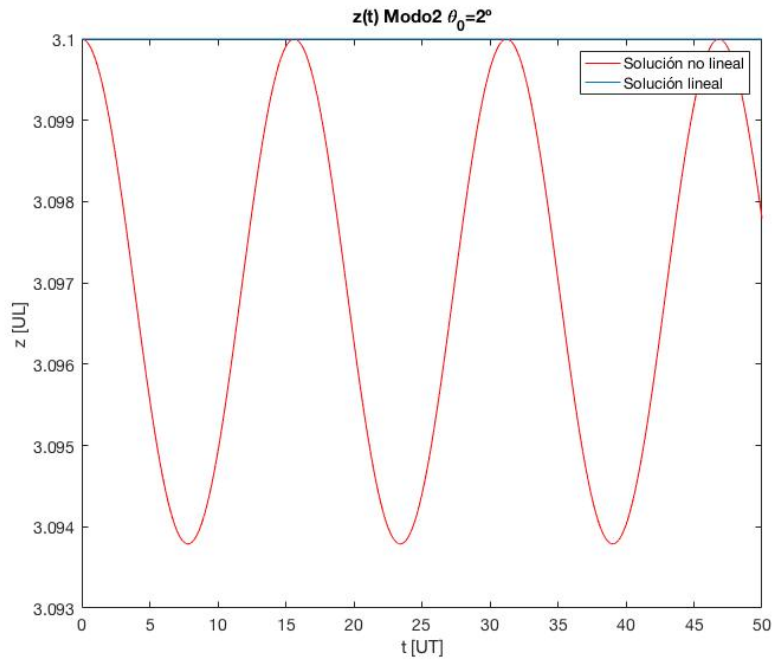


Figura 5.14 *Movimiento vertical. Modo 2. $\theta_0 = 2^\circ$*

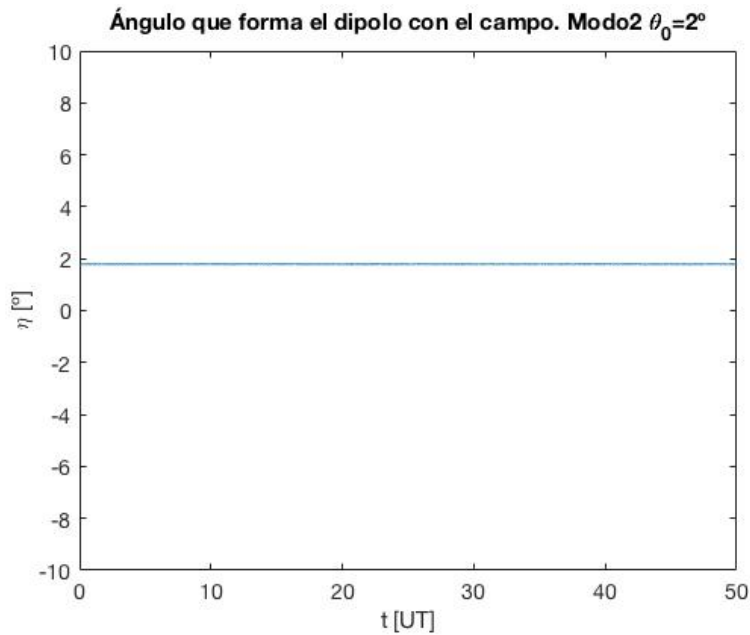


Figura 5.15 *Ángulo que forma el dipolo con el campo. Modo 2. $\theta_0 = 2^\circ$*

Como se observa en las figuras anteriores, para una inclinación relativamente pequeña de 2° , el movimiento es idéntico al del sistema linealizado, produciéndose solo acoplamiento con el movimiento vertical. Para este modo, el dipolo mantiene un ángulo aproximadamente constante con respecto al campo magnético local, pero en este caso no es igual a θ_0 , si no algo inferior.

5.1.2.2 Soluciones para $\theta_0 = 8^\circ$

Para ángulos de inclinación mas elevados, las órbitas se mantienen aproximadamente circulares tanto para en el plano como para la precesión.

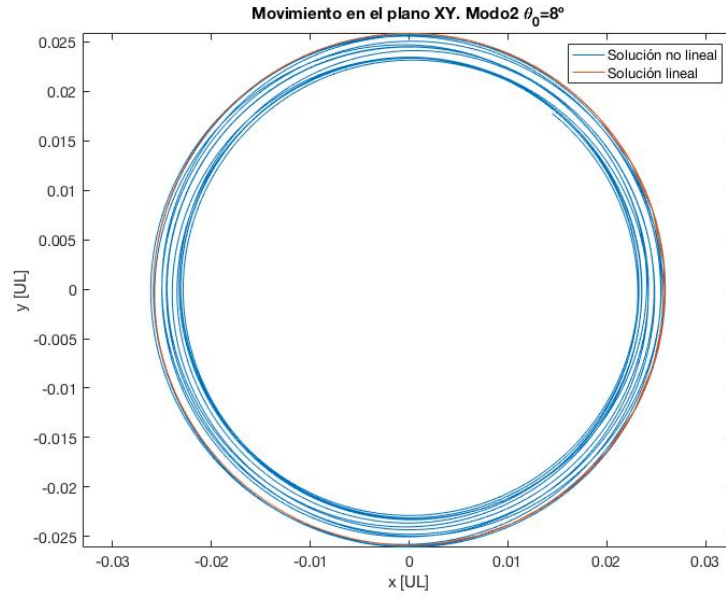


Figura 5.16 *Movimiento en el plano XY. Modo 2. $\theta_0 = 8^\circ$*

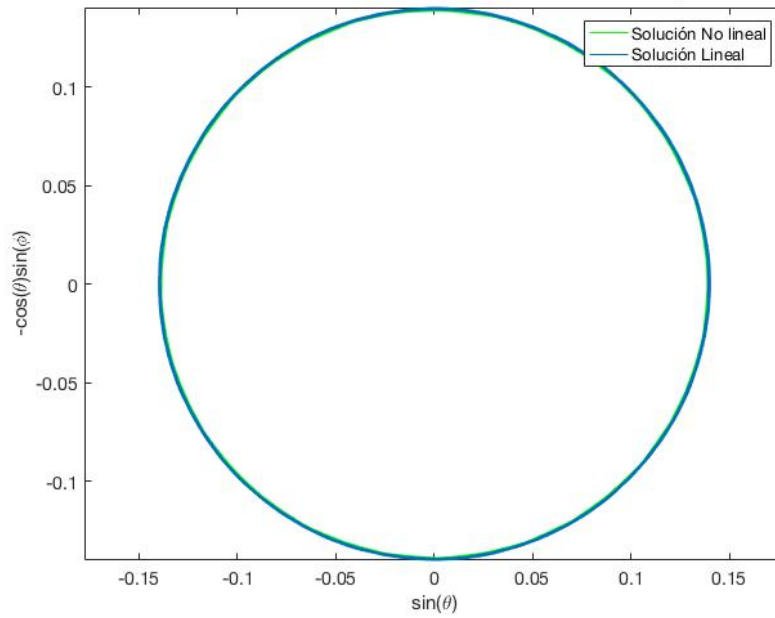


Figura 5.17 *Movimiento de precesión. Modo 2. $\theta_0 = 8^\circ$*

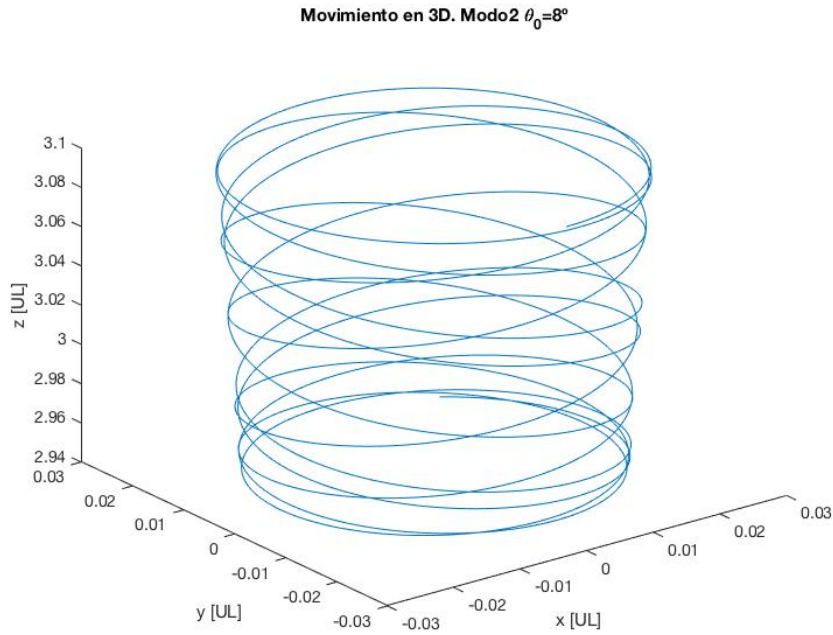


Figura 5.18 *Movimiento tridimensional. Modo 2. $\theta_0 = 8^\circ$*

Como se observa en la Figura 5.18, las oscilaciones verticales se hacen mayores a medida que aumentamos la amplitud de las condiciones iniciales. El movimiento queda definido alrededor de la superficie de un cilindro imaginario.

En cuanto al ángulo que forma el dipolo con el campo, se mantiene constante e aproximadamente igual a $\eta = 7.2^\circ$.

5.1.3 Modo 3

Se mostrarán a continuación los resultados correspondientes al tercer modo, cuya frecuencia natural es $\omega_3 = 0.2322 \text{ UT}^{-1}$. Para este modo, el acoplamiento de frecuencias es más acentuado, percibiéndose las diferencias en las trayectorias con respecto al sistema lineal para amplitudes mas bajas.

5.1.3.1 Soluciones para $\theta_0 = 2^\circ$

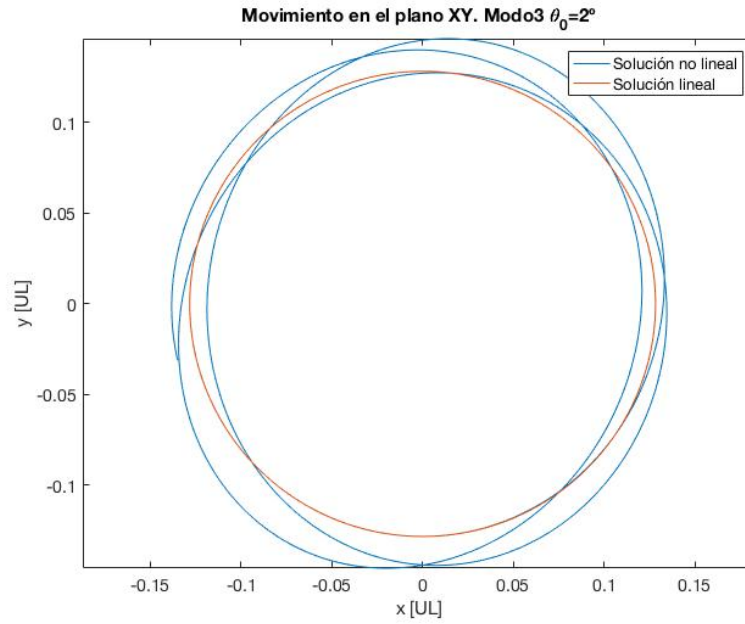


Figura 5.19 *Movimiento en el plano XY. Modo 3. $\theta_0 = 2^\circ$.*

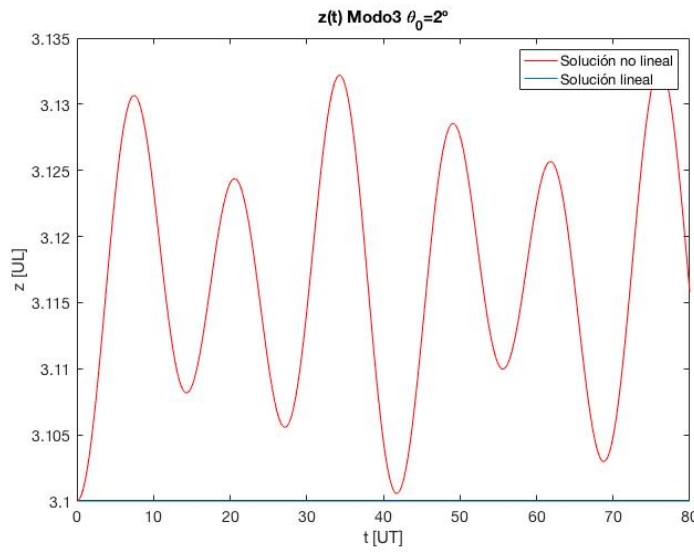


Figura 5.20 *Movimiento vertical. Modo 3. $\theta_0 = 2^\circ$.*

Se puede observar que las oscilaciones verticales no proceden de una frecuencia únicamente, si no que existe cierto acoplamiento con otras frecuencias.

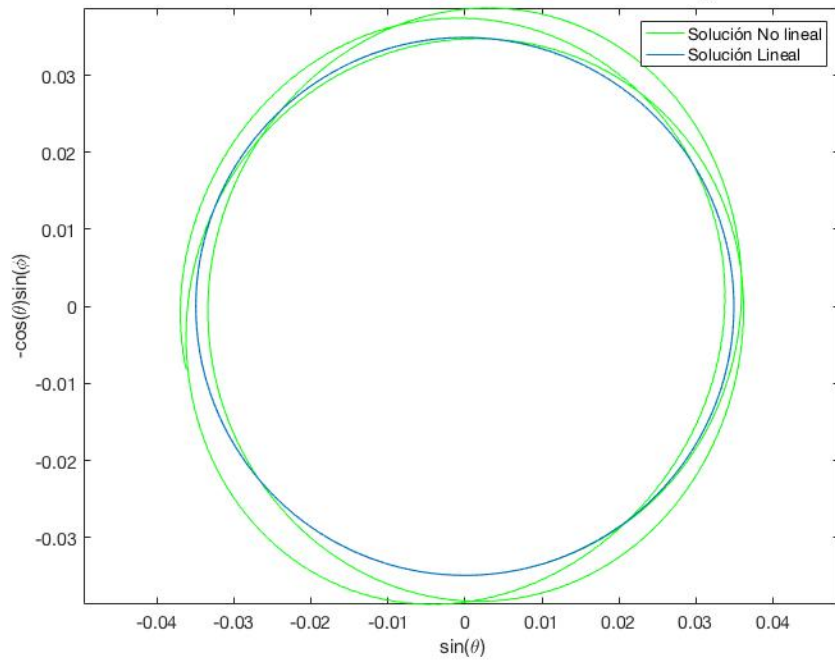


Figura 5.21 *Movimiento de precesión. Modo 3. $\theta_0 = 2^\circ$.*

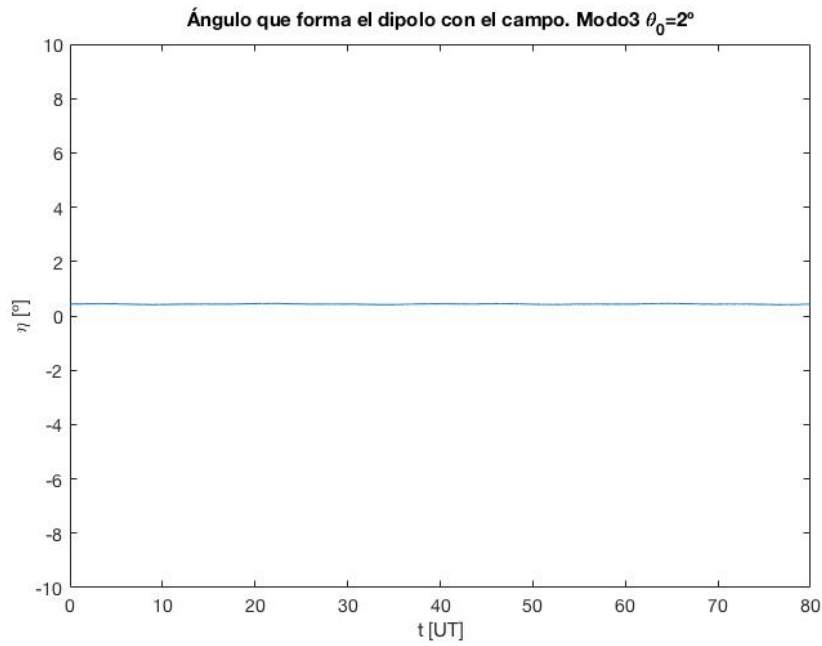


Figura 5.22 *Ángulo que forma el dipolo con el campo. Modo 3. $\theta_0 = 2^\circ$.*

De la Figura 5.21 deducimos que existe un acoplamiento con otras frecuencias para las coordenadas θ y ϕ , por lo que las órbitas de la proyección del eje Z_3 dejan de ser circulares. En cuanto al ángulo que forma el dipolo con el campo, se mantiene constante durante el movimiento e igual a $\eta = 0.43^\circ$.

5.1.3.2 Soluciones para $\theta_0 = 8^\circ$

A medida que aumentamos la amplitud de las condiciones iniciales, el acoplamiento de frecuencias es mas acentuado, y las órbitas dejan de tener forma circular. Para $\theta = 8^\circ$ la trayectoria del movimiento en el plano es la siguiente.

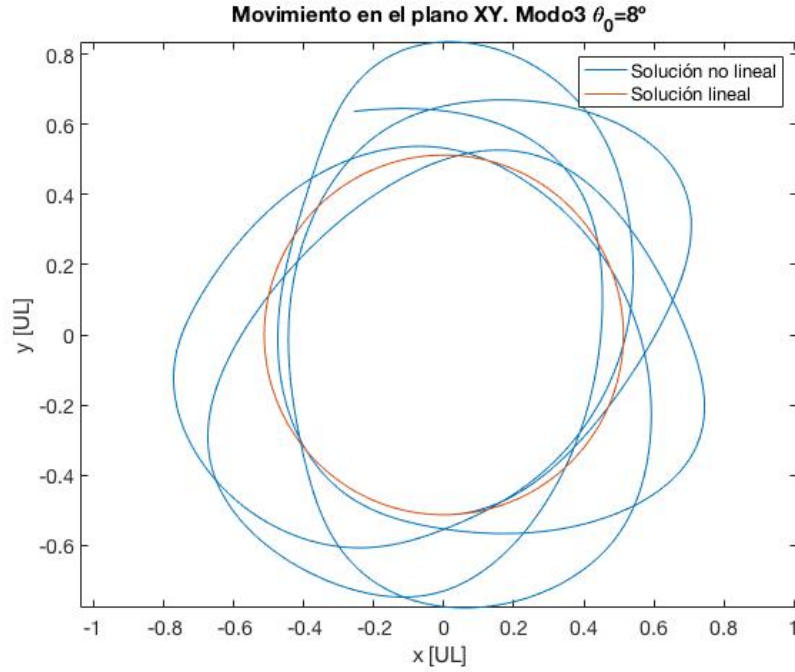


Figura 5.23 *Movimiento en el plano XY. Modo 3. $\theta_0 = 8^\circ$.*

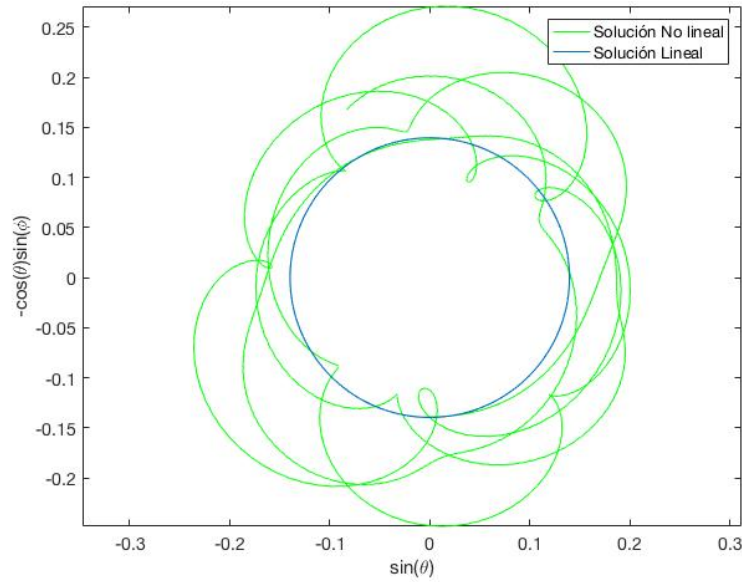


Figura 5.24 *Movimiento de precesión. Modo 3. $\theta_0 = 8^\circ$.*

En cuanto al movimiento vertical, se puede apreciar con claridad que deja de tener forma sinusoidal simple.

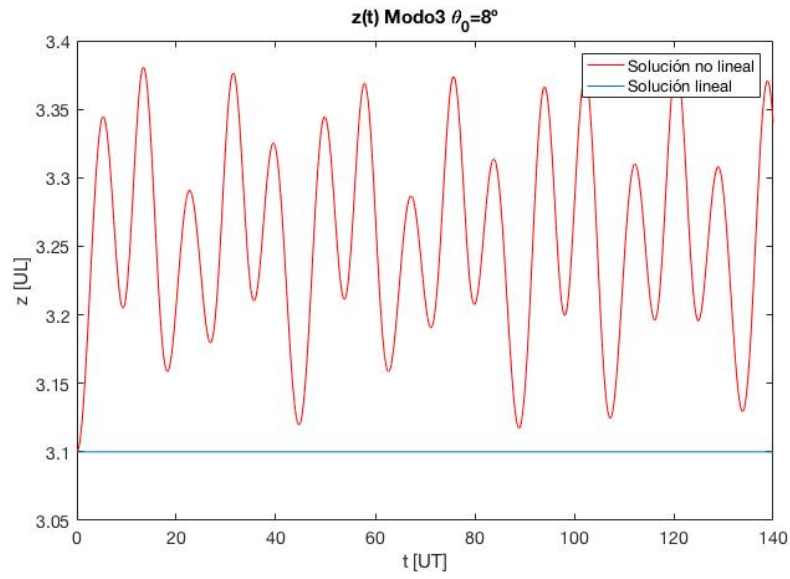


Figura 5.25 *Movimiento vertical. Modo 3. $\theta_0 = 8^\circ$.*

El ángulo formado con el campo deja de ser constante y presenta oscilaciones complejas.

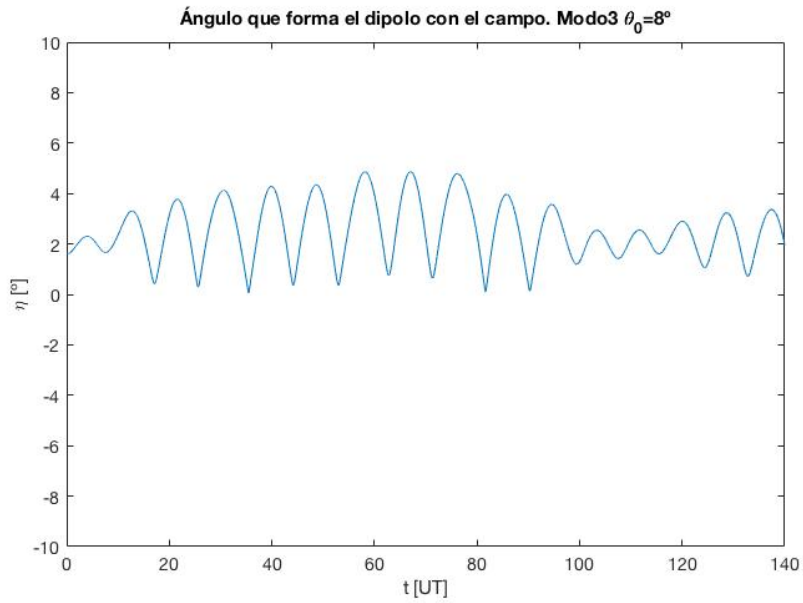


Figura 5.26 *Ángulo que forma el dipolo con el campo. Modo 3. $\theta_0 = 8^\circ$.*

5.1.3.3 Soluciones para $\theta_0 = 12^\circ$

Para ángulos tan grandes como $\theta_0 = 12^\circ$, las trayectorias se vuelven mas caóticas y desordenadas, así como la oscilación vertical se hace mayor.

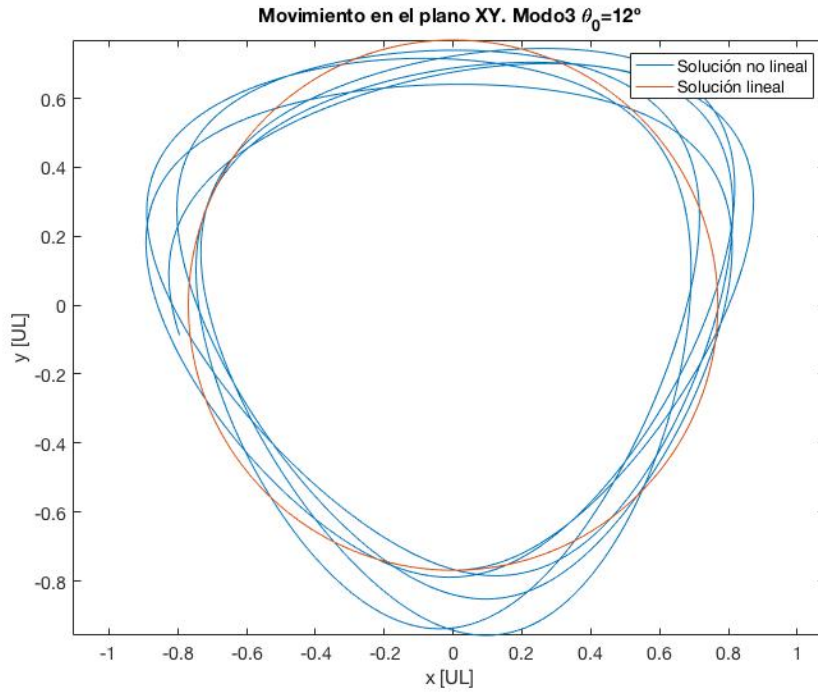


Figura 5.27 *Movimiento en el plano XY. Modo 3. $\theta_0 = 12^\circ$.*

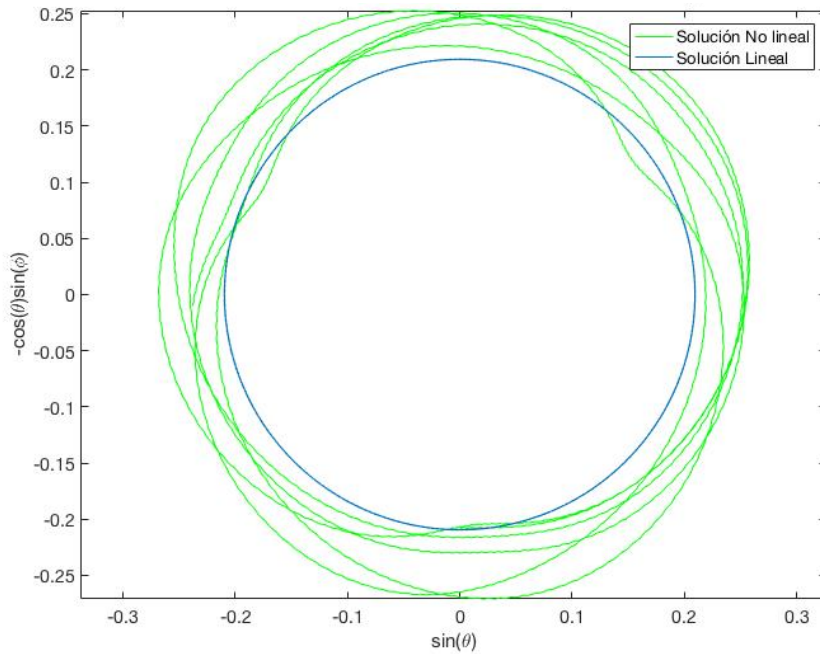


Figura 5.28 *Movimiento de precesión. Modo 3. $\theta_0 = 12^\circ$.*

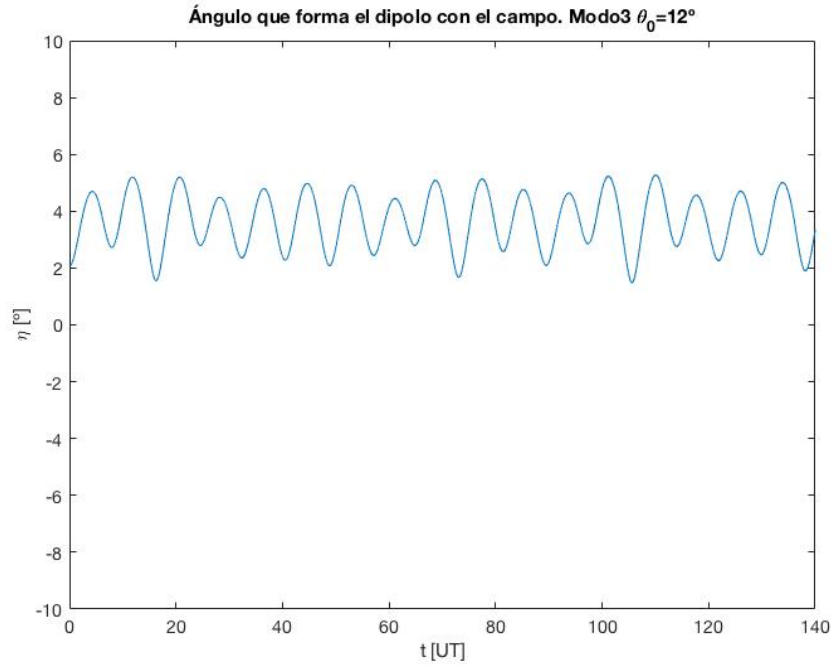


Figura 5.29 *Ángulo que forma el dipolo con el campo. Modo 3. $\theta_0 = 12^\circ$.*

El ángulo que forma el dipolo con el campo presenta oscilaciones complejas entre 2° y 5° de inclinación.

A continuación se muestra una representación en 3D del movimiento, a modo ilustrativo.

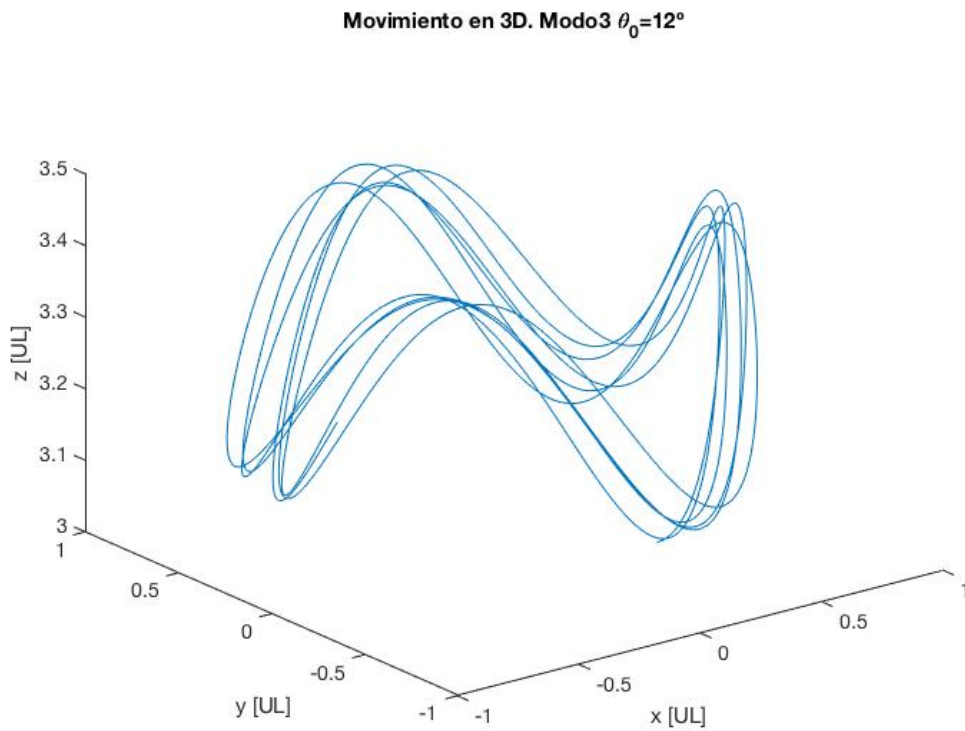


Figura 5.30 *Movimiento tridimensional. Modo 3. $\theta_0 = 12^\circ$.*

5.1.4 Modo 4

El cuarto modo es el más lento con una frecuencia natural de $\omega_4 = 0.1155 \text{ UT}^{-1}$. A continuación se muestran los resultados de las diferentes simulaciones numéricas realizadas. Para este modo, las diferencias con el sistema lineal son mucho mas apreciables, ya que el movimiento deja de ser circular a partir de amplitudes relativamente pequeñas.

5.1.4.1 Soluciones para $\theta_0 = 2^\circ$

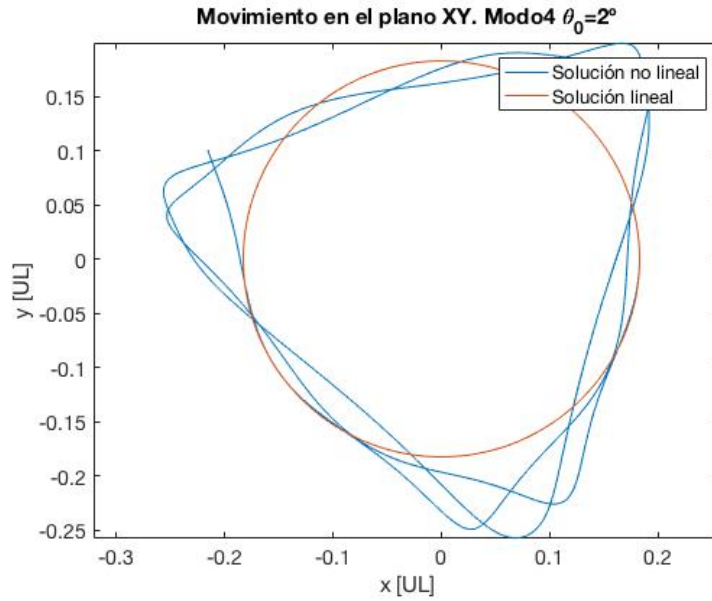


Figura 5.31 *Movimiento en el plano XY. Modo 4. $\theta_0 = 2^\circ$.*

Las oscilaciones verticales también son complejas y por encima de la posición de equilibrio.

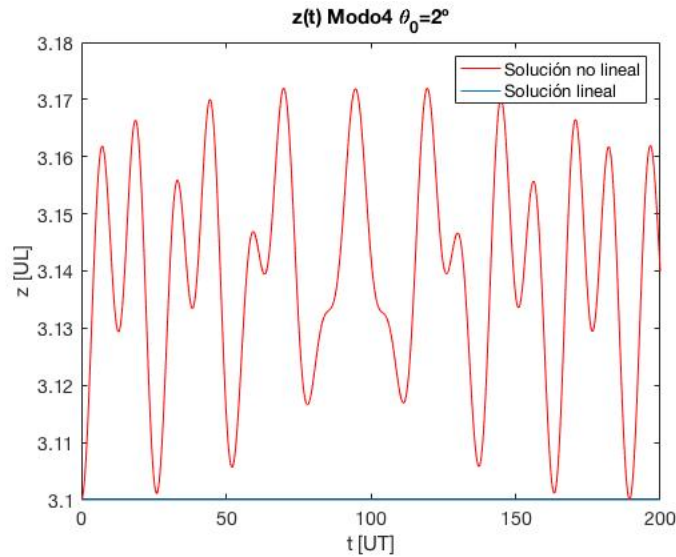


Figura 5.32 *Movimiento vertical. Modo 4. $\theta_0 = 2^\circ$.*

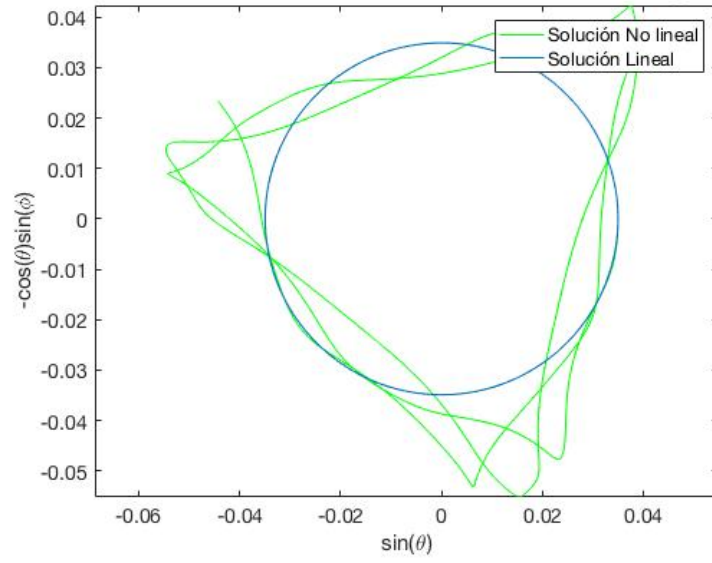


Figura 5.33 *Movimiento de precesión. Modo 4. $\theta_0 = 2^\circ$.*

El ángulo η oscila cercano a cero durante el movimiento.

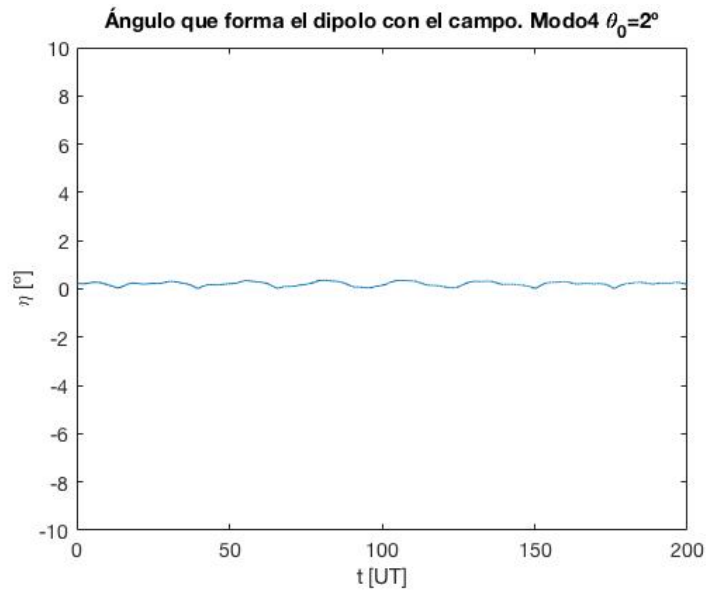


Figura 5.34 *Ángulo que forma el dipolo con el campo. Modo 4. $\theta_0 = 2^\circ$.*

5.1.4.2 Soluciones para $\theta_0 = 7^\circ$

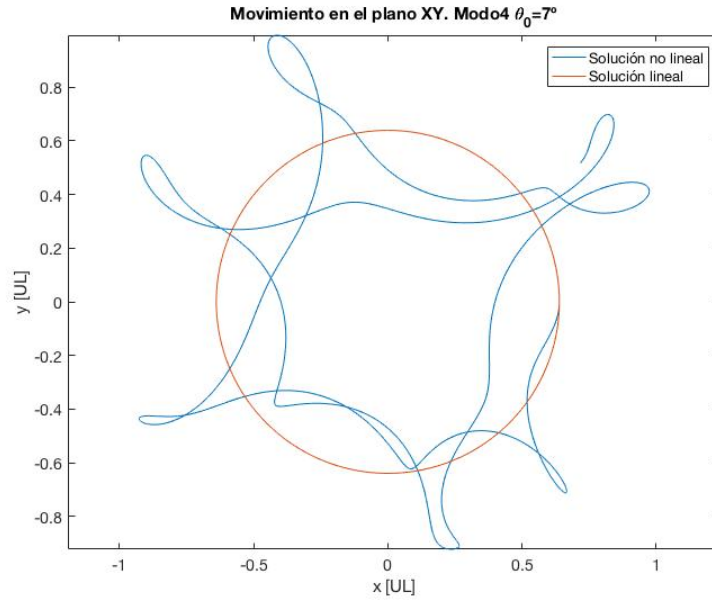


Figura 5.35 *Movimiento en plano XY. Modo 4. $\theta_0 = 7^\circ$.*

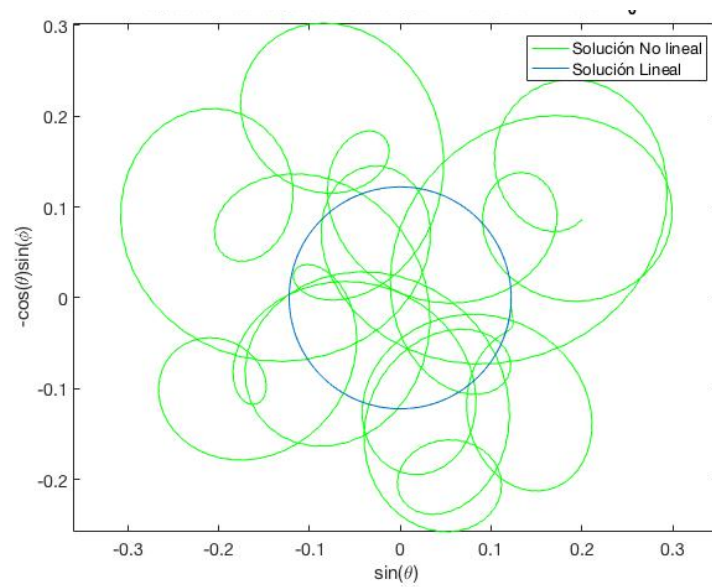


Figura 5.36 *Movimiento de precesión. Modo 4. $\theta_0 = 7^\circ$.*

Para mayores amplitudes, el ángulo η oscila con mayor amplitud.

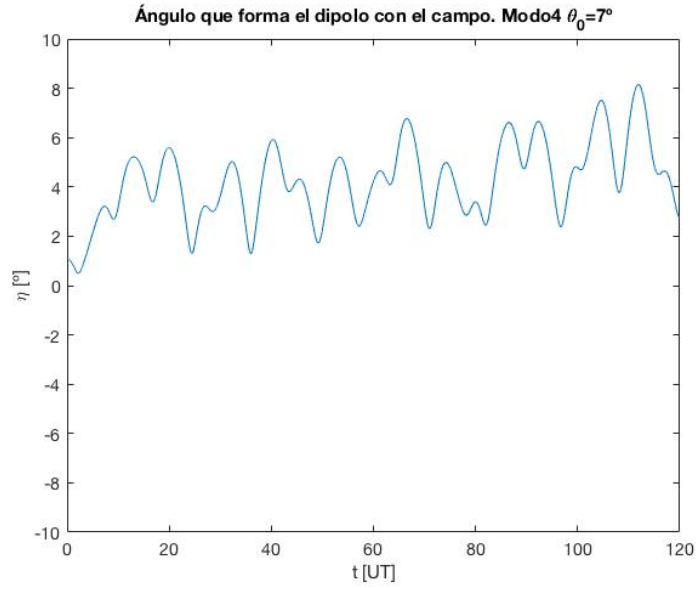


Figura 5.37 Ángulo que forma el dipolo con el campo. Modo 4. $\theta_0 = 7^\circ$.

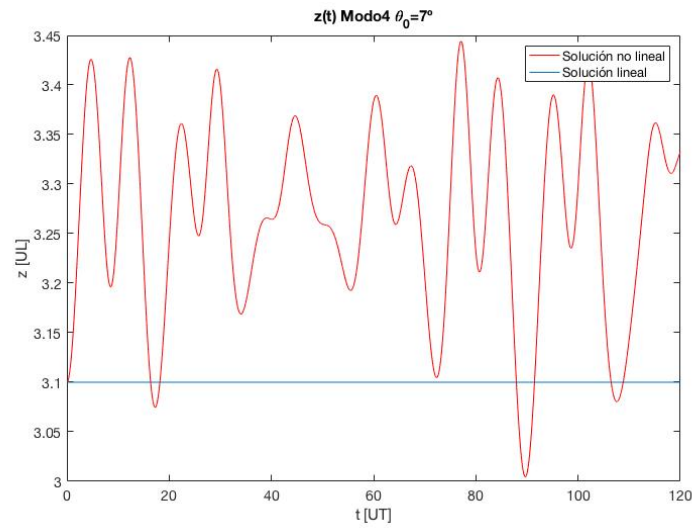


Figura 5.38 Movimiento vertical. Modo 4. $\theta_0 = 7^\circ$.

5.2 Fronteras de estabilidad no lineal

En el Capítulo 4 se definió el concepto de región de estabilidad lineal, en la cual la energía potencial del sistema presenta un mínimo relativo y tiene curvatura positiva en todas las direcciones del espacio. De forma similar, en este trabajo se ha calculado como la región en la que los autovalores de la matriz asociada al sistema linealizado son imaginarios puros, lo que nos permite afirmar que el sistema es oscilatorio tal y como se busca en una posición de levitación estable.

Sin embargo, esta región de estabilidad lineal no tiene en cuenta los parámetros iniciales del sistema tal y como puede ser el ángulo de inclinación θ_0 . Una simulación numérica al sistema lineal con un valor $\theta_0 = 180^\circ$ (es decir, el dipolo se encuentra boca abajo en su posición inicial) arrojaría resultados pertenecientes a órbitas estables, lo que no tiene sentido físico. De manera natural, se entiende que debe existir una limitación asociada a la amplitud de las condiciones iniciales del movimiento. En otras palabras, y como se viene trabajando hasta ahora, debe existir una limitación del ángulo de inclinación inicial θ_0 del dipolo.

Tomando cada modo natural, y al igual que con las fronteras de la región de estabilidad lineal, para distintos valores de Ω y β (o z_m) el valor límite de θ_0 será distinto. Por eso, se han realizado varias simulaciones numéricas con distintos valores de Ω y z_m , y se han calculado los valores límite θ_0^{max} , que definen las curvas de la frontera de la región de estabilidad no lineal. A partir de esos valores se ha realizado un ajuste polinómico de las curvas que definen dicha frontera. En este análisis se ha supuesto θ_0 positivo, pero al ser un sistema simétrico, los resultados se pueden extrapolar a valores negativos.

El primer modo, el más rápido, no presenta grandes variaciones en el máximo ángulo de inclinación con respecto a la velocidad de giro propio Ω para una posición de equilibrio constante. Para $z_m = cte$ se observa que hay tendencia decreciente.

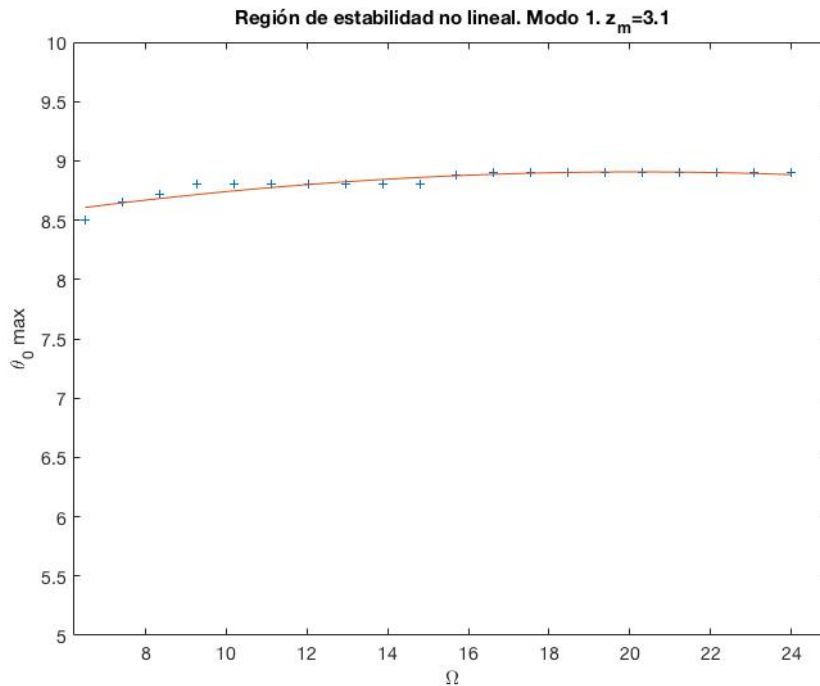


Figura 5.39 Frontera de estabilidad no lineal. $z_m = cte$. Modo 1.

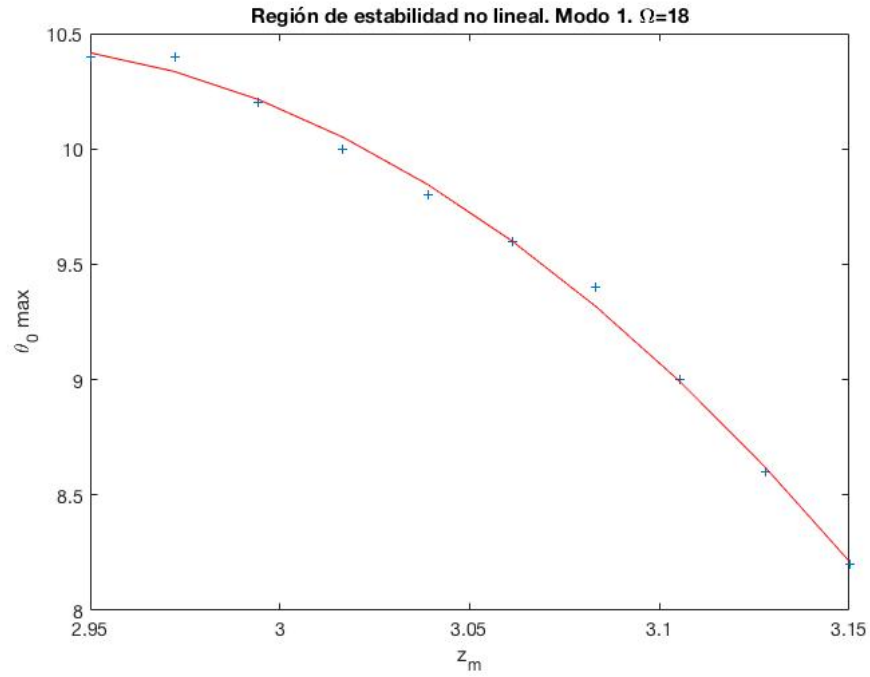


Figura 5.40 *Frontera de estabilidad no lineal. $\Omega = cte$. Modo 1.*

Para el segundo modo, la tendencia de θ_0^{max} al variar Ω es creciente y decreciente con z_m , como se muestra en las Figuras 5.41 y 5.42.

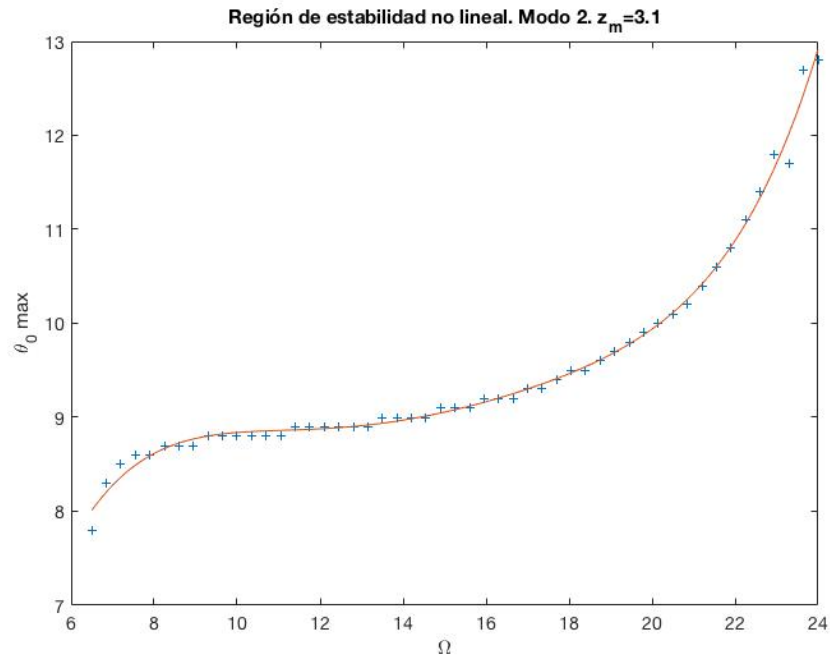


Figura 5.41 *Frontera de estabilidad no lineal. $z_m = cte$. Modo 2.*

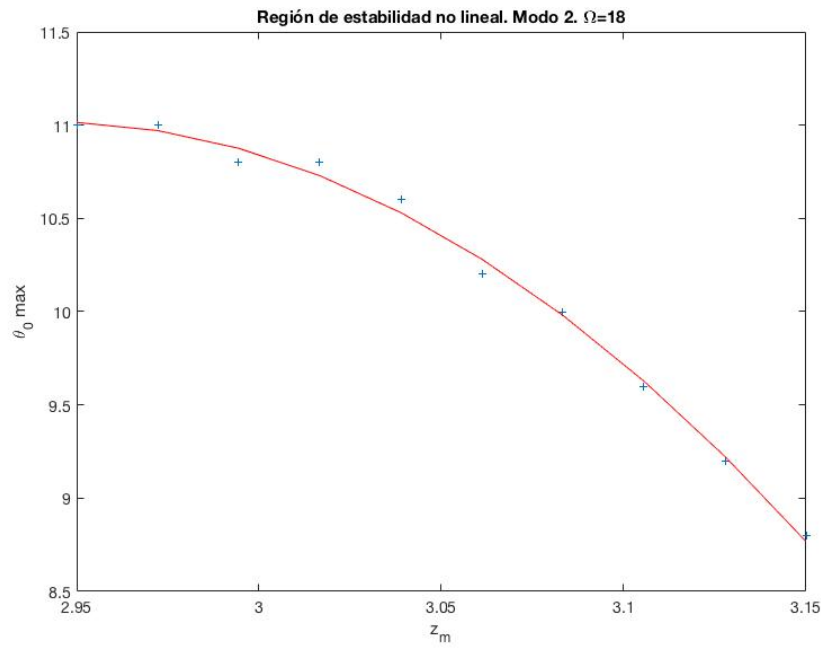


Figura 5.42 *Frontera de estabilidad no lineal. $\Omega = \text{cte.}$ Modo 2.*

En cuanto al tercer modo, el ángulo de estabilidad límite se hace más pequeño a medida que aumenta la velocidad de giro propio Ω . Al ser un modo más caótico, con mayor acoplamiento de frecuencias que los dos anteriores, las simulaciones arrojan valores más espaciados, por lo que el ajuste polinómico presenta mayor error. Al variar z_m se observa una tendencia creciente, y luego decreciente. Para el ajuste de esta curva se ha utilizado un polinomio de cuarto grado. Nótese que a velocidades de giro pequeñas, el sistema levita de forma estable a ángulos θ_0 del orden de 30° .

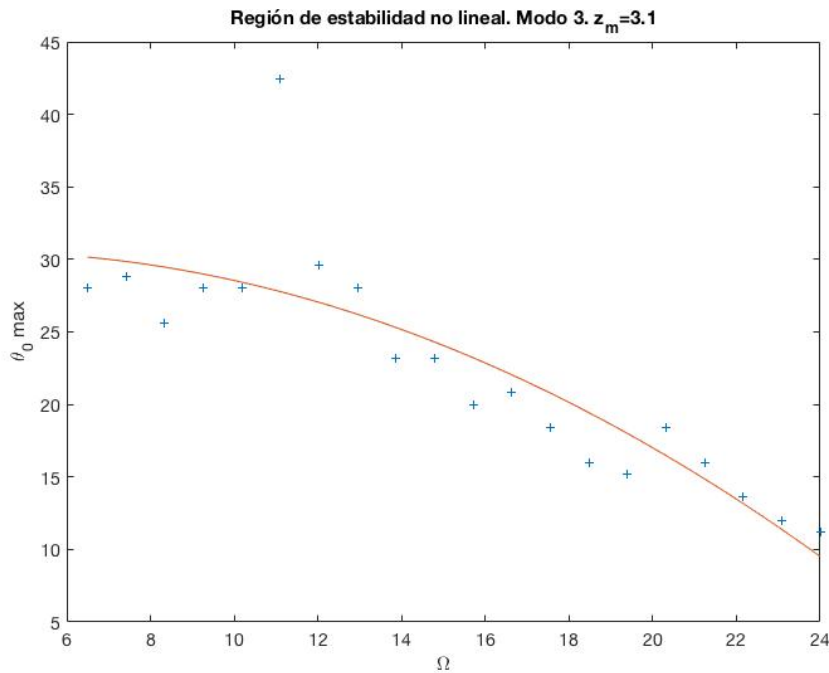


Figura 5.43 *Frontera de estabilidad no lineal. $z_m = \text{cte.}$ Modo 3.*

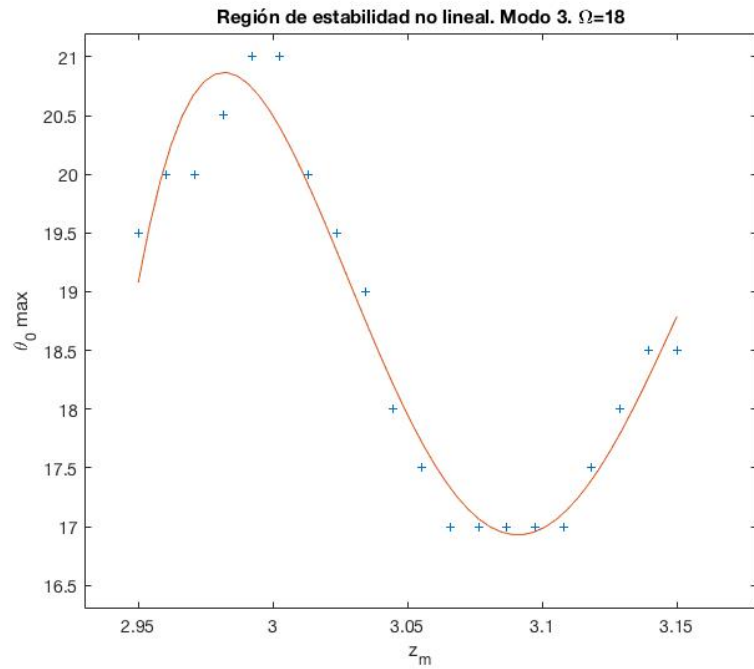


Figura 5.44 *Frontera de estabilidad no lineal. $\Omega = \text{cte.}$ Modo 3.*

El cuarto modo también presenta una fuerte dependencia del ángulo θ_0^{max} con la velocidad de giro propio, siendo decreciente con al aumentar esta. Al variar z_m , el ángulo límite crece, con una tendencia casi lineal, como se aprecia en la Figura 5.46.

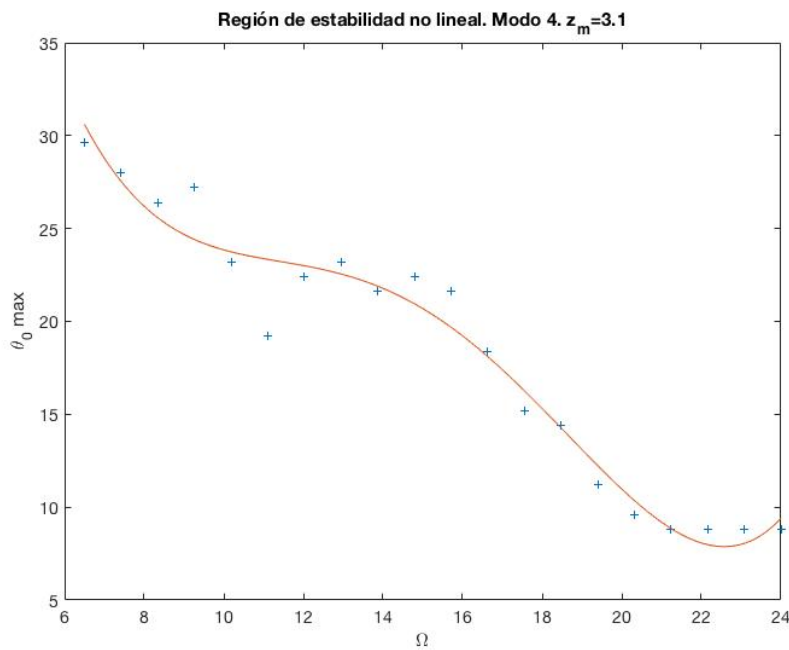


Figura 5.45 *Frontera de estabilidad no lineal. $z_m = \text{cte.}$ Modo 4.*

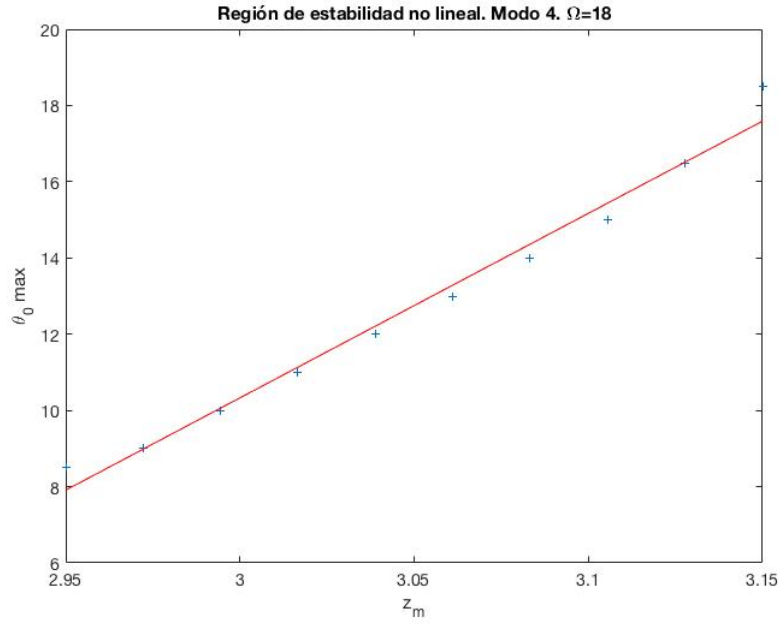


Figura 5.46 *Frontera de estabilidad no lineal. $\Omega = \text{cte.}$ Modo 4.*

5.3 Combinación de modos

Hasta ahora todas las simulaciones numéricas llevadas a cabo corresponden al caso en el que las condiciones iniciales del problema corresponden a los modos normales del sistema, es decir, a los autovalores de la matriz asociada al sistema lineal. Los movimientos hasta aquí mostrados corresponden a los que realiza el sistema al ser excitado en una de sus frecuencias naturales, con las condiciones iniciales determinadas. Sin embargo, estos casos son difíciles de aplicar en la realidad, puesto que haría falta muchísima precisión para lograr los valores exactos de velocidad inicial, posición y velocidad angular.

A continuación se estudian los casos de las condiciones iniciales más simples, que no corresponden a un autovector en concreto, si no que pueden escribirse como combinación lineal de varios. Se estudiarán los casos en los que el dipolo se encuentra totalmente alineado con el eje OZ y a separado una cierta distancia x_0 del mismo, y en los que se encuentra en el centro del disco inclinado cierto ángulo θ_0 . Estos casos son más realistas de llevar a cabo en un experimento si se quisiera. Mediante simulaciones numéricas, se estudiará la forma de las trayectorias, así como los límites de estabilidad. En todas las simulaciones mostradas a continuación se han utilizado los valores de los parámetros $z_m = 3.1 \text{ UL}$ y $\Omega = 18 \text{ UT}^{-1}$.

5.3.1 Comportamiento al variar θ_0

Se han realizado simulaciones con θ_0 variando entre 0° y 8° , que coincide con el ángulo límite para el cual el dipolo se desestabiliza pasado un intervalo de tiempo.

En este caso, las órbitas en el plano XY dejan de ser circulares por completo. A continuación se muestra la proyección de la trayectoria de la peonza sobre el plano XY para $\theta_0 = 0.5^\circ$ y $\theta_0 = 6^\circ$.

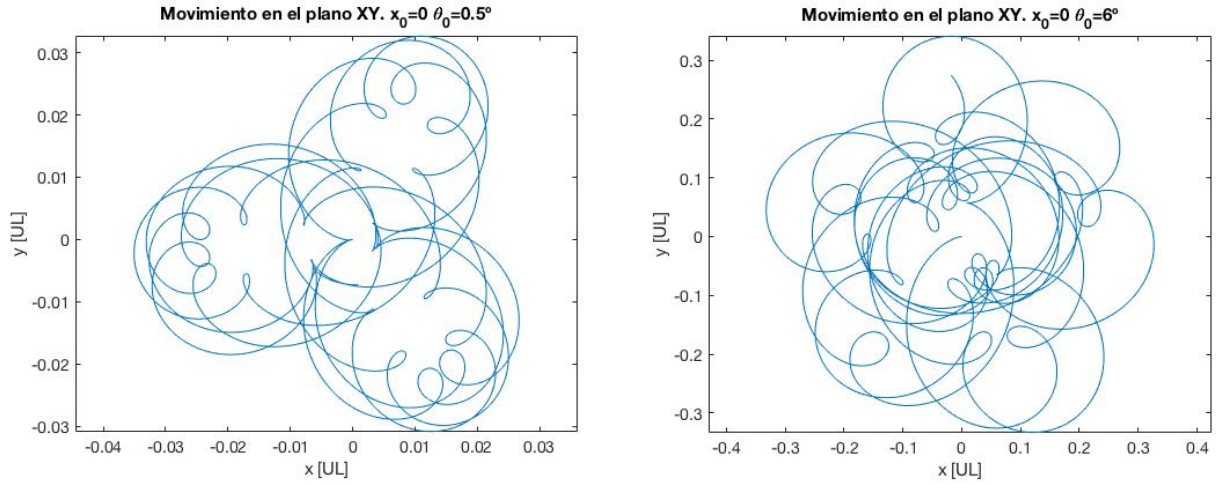


Figura 5.47 *Movimiento en el plano XY.* $\theta_0 = 0.5^\circ$ y $\theta_0 = 6^\circ$.

A medida que crece el ángulo la amplitud de las oscilaciones en el plano aumenta. Nótese la diferencia entre la simulación con $\theta_0 = 0.5^\circ$ a la izquierda y la mostrada a la derecha con $\theta_0 = 6^\circ$, donde la distancia al eje es del orden de diez veces mayor. A partir de $\theta_0 = 6^\circ$ se ha comprobado que el dipolo empieza a ser inestable pasando un cierto periodo de tiempo, el cual es menor a medida que se aumenta la inclinación.

El movimiento de precesión se muestra en la siguiente imagen.

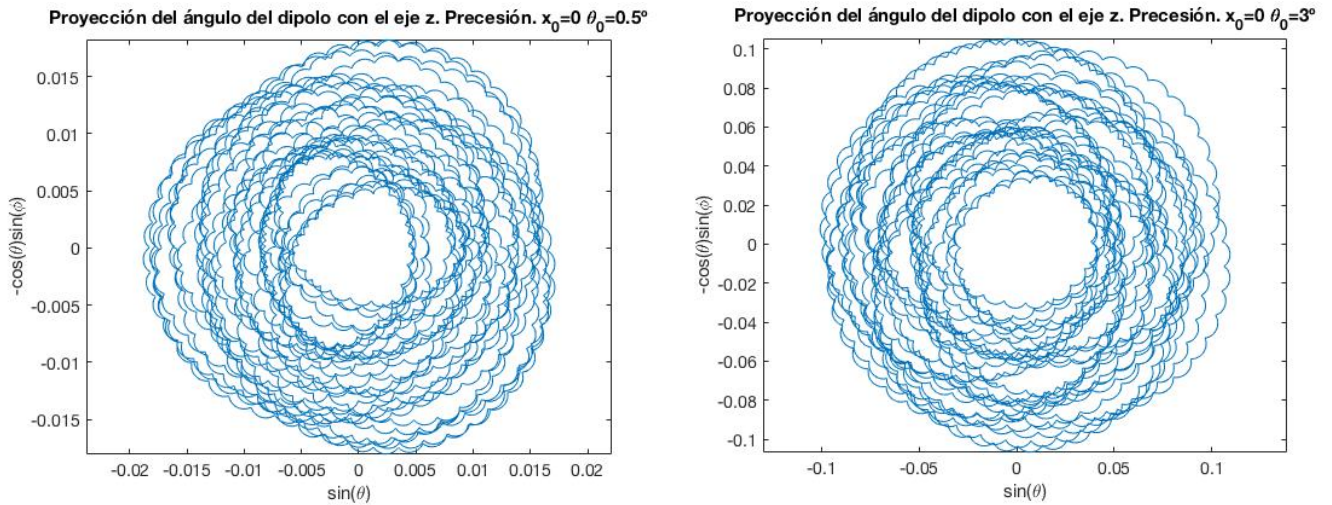


Figura 5.48 *Movimiento de precesión.* $\theta_0 = 0.5^\circ$ y $\theta_0 = 3^\circ$.

Al igual que con el movimiento en el plano, el movimiento de precesión se vuelve más amplio a medida que lo hace el ángulo de inclinación inicial. Es decir, el dipolo rota con mayor inclinación. Esto da lugar a que llegado a cierto punto, el ángulo $\theta > \theta_0$ se haga demasiado grande y el dipolo vuelque. Por ejemplo, con un $\theta_0 = 6^\circ$, en el movimiento la peonza llega a alcanzar ángulos del orden de $\theta \approx 12^\circ$.

En cuanto a las oscilaciones verticales, estas aumentan con el ángulo de inclinación. También, al mismo tiempo la forma de las mismas cambia, debido a que unas frecuencias se hacen dominantes frente a otras, como se puede observar en la Figura 5.49.

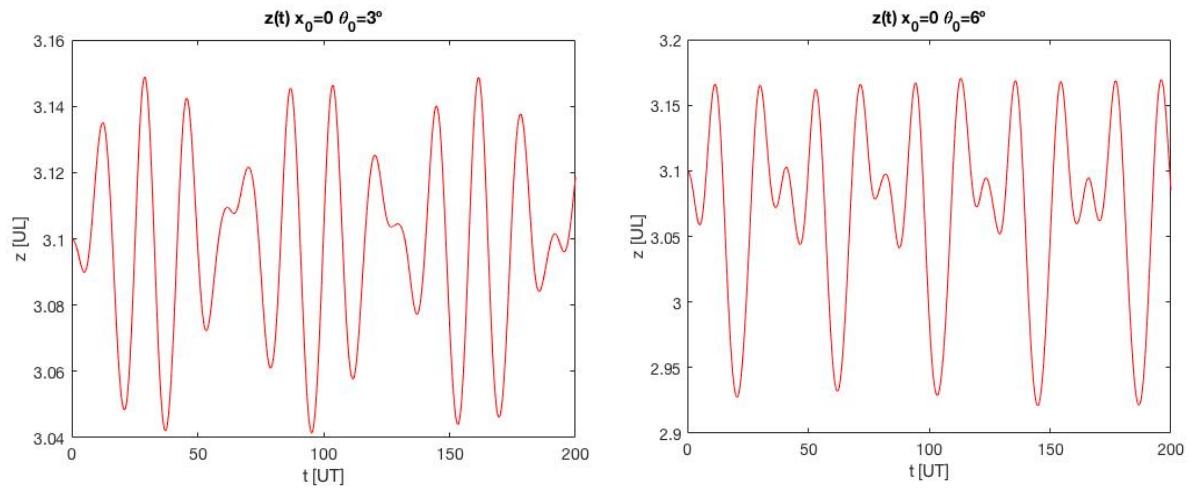


Figura 5.49 *Movimiento vertical.* $\theta_0 = 3^\circ$ y $\theta_0 = 6^\circ$.

A partir de ángulos superiores a $\theta_0 = 8^\circ$ el dipolo se desestabiliza y cae. En la Figura 5.50 se puede observar la proyección en el plano XZ del movimiento en esta situación.

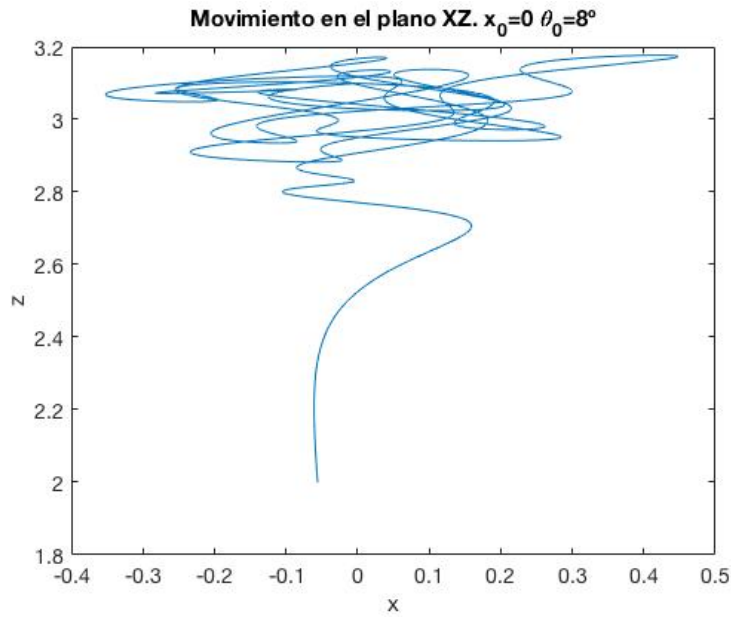


Figura 5.50 *Movimiento en el plano XZ.* $\theta_0 = 8^\circ$.

Adicionalmente, resulta interesante comprobar como varía el tiempo que tarda en caer la peonza con el ángulo θ_0 . En la siguiente gráfica se muestran los resultados de varias simulaciones.

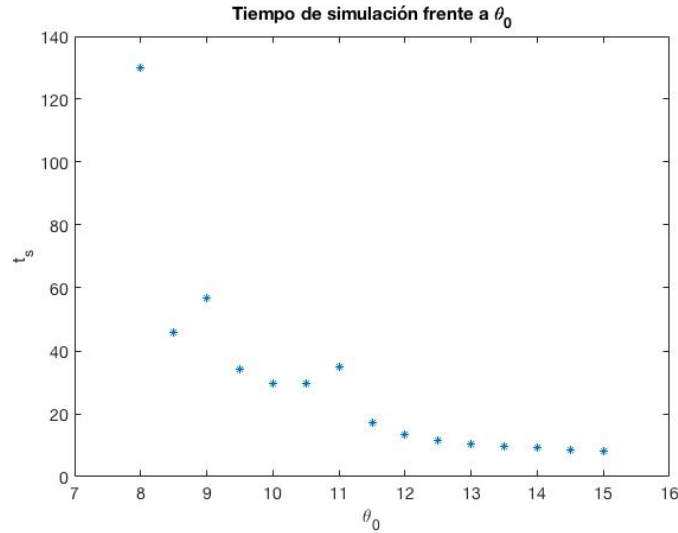


Figura 5.51 *Tiempo de simulación t_s [UT] frente a θ_0 [°].*

Se puede comprobar que el tiempo de levitación se reduce drásticamente al superar $\theta_0 > 8^\circ$, a partir del cual la disminución es menos acusada.

5.3.2 Comportamiento al variar x_0

A continuación se estudiará el caso en el que el dipolo se encuentre perfectamente alineado con el eje vertical del disco, es decir $\theta_0 = 0$, y separado una cierta distancia inicial x_0 . Se mostrarán las trayectorias del movimiento, tanto en el plano horizontal como en el plano vertical, así como el estudio de los ángulos con respecto al campo y al eje OZ, como se viene trabajando hasta ahora. También se estudiarán los límites de estabilidad en términos de la distancia máxima x_0^{max} en función de la velocidad de giro propio de la peonza Ω .

La forma de las órbitas en el plano horizontal es similar al aumentar la lejanía x_0 , haciéndose cada vez más grandes. Como se ve en las figuras, la distancia máxima al eje OZ que recorre la peonza es superior a x_0 , llegando a ser de 0.8 UL para $x_0 = 0.5$ UL, lo que equivale, en unidades físicas a 20 mm, una distancia considerablemente grande.

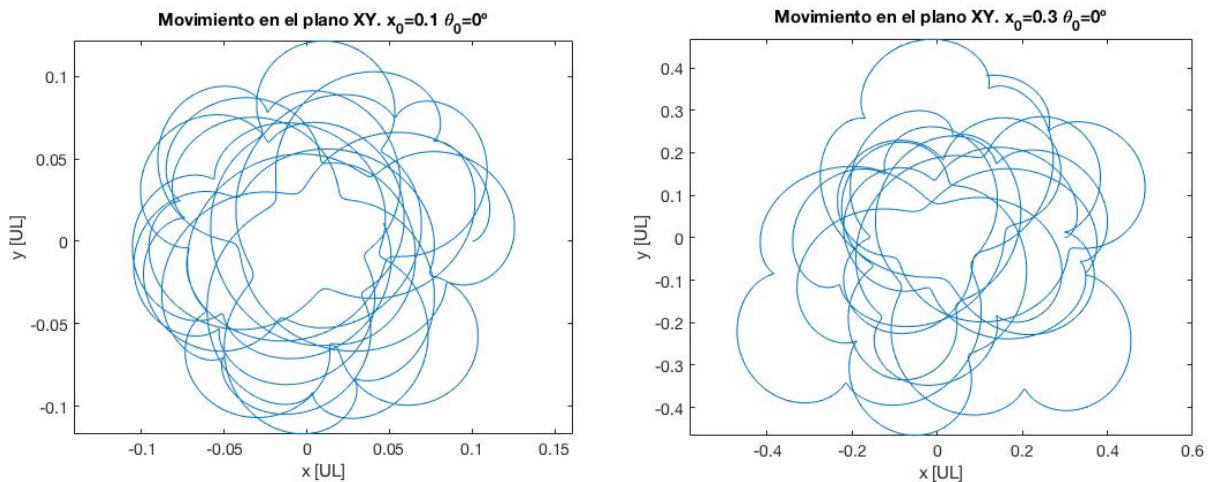


Figura 5.52 *Movimiento en el plano XY. $x_0 = 0.1$ UL y $x_0 = 0.3$ UL*

Al igual que con el caso estudiado anteriormente, el movimiento de precesión se va acentuando a lo largo de la simulación, lo que quiere decir que el dipolo levita cada vez con más inclinación. En las siguientes figuras se muestran las órbitas para $x_0 = 0.3$ UL y $x_0 = 0.5$ UL.

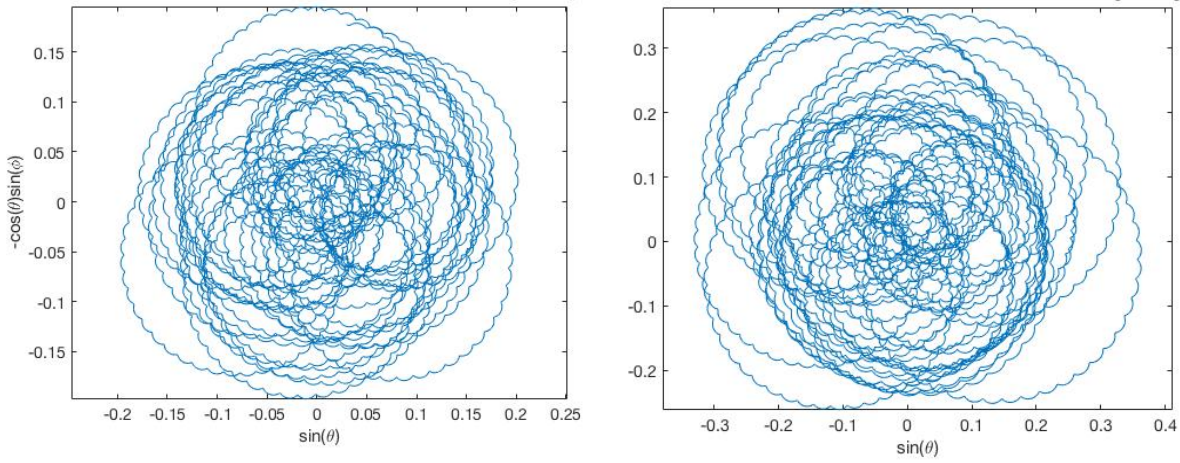


Figura 5.53 *Movimiento de precesión.* $x_0 = 0.3$ UL (izq.) y $x_0 = 0.5$ UL (dcha.).

También resulta interesante ver la evolución de la coordenada $\theta(t)$ a lo largo del movimiento. A pesar de que el movimiento con inclinación nula, la tendencia natural del dipolo a lo largo de la levitación es de inclinarse y precesar sobre si mismo. Cuanto mayor es el radio de la órbita, mayor es el ángulo de inclinación. En la siguiente figura se puede ver la evolución temporal de $\theta(t)$ en dos simulaciones diferentes, para $x_0 = 0.3$ UL y $x_0 = 0.5$ UL.

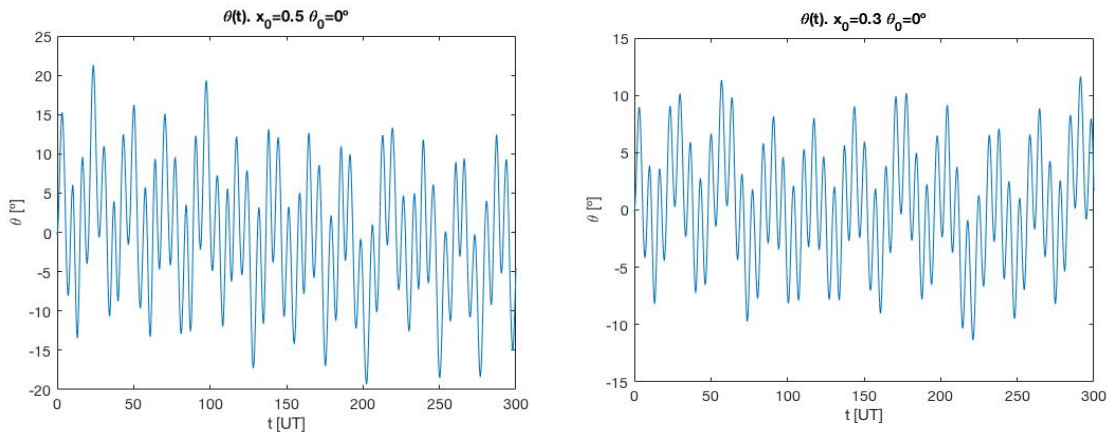


Figura 5.54 $\theta(t)$. $x_0 = 0.3$ UL y $x_0 = 0.5$ UL.

Obsérvese que para $x_0 = 0.5$ UL el dipolo alcanza inclinaciones de hasta 20° en el movimiento.

A continuación se muestra la evolución de la coordenada $z(t)$ para $x_0 = 0.3$ UL y $x_0 = 0.5$ UL.

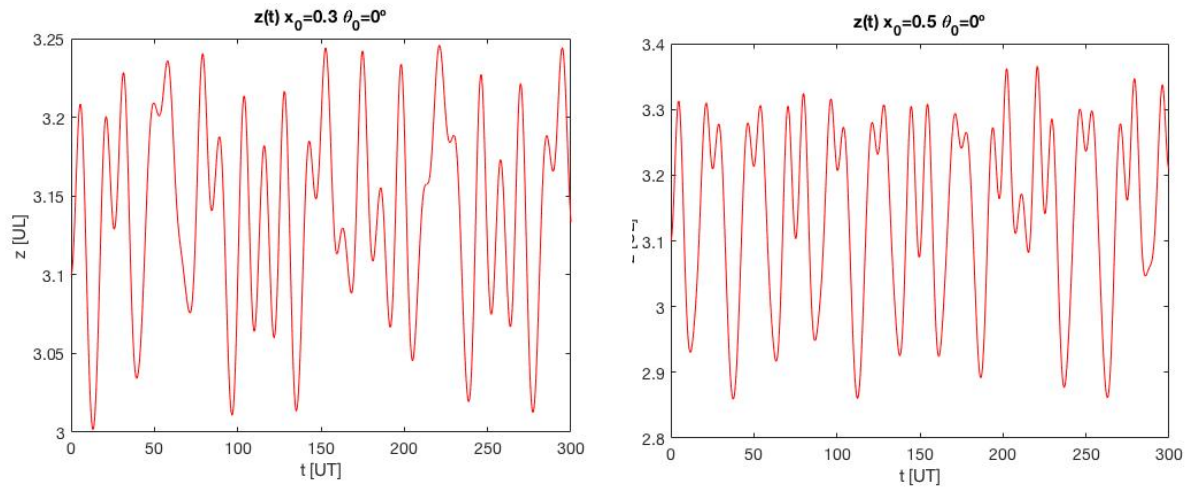


Figura 5.55 *Movimiento vertical.* $x_0 = 0.3$ UL y $x_0 = 0.5$ UL.

Para concluir, es necesario remarcar que todas estas simulaciones se han hecho para una velocidad de giro propio $\Omega = cte$. Sin embargo, este parámetro es un factor crítico a la hora de estabilizar la peonza. A continuación, la Figura 5.56 se muestran los resultados de varias simulaciones para diferentes valores de Ω , en los que se ha calculado el máximo valor del alejamiento horizontal que puede alcanzar la peonza para mantener una levitación estable.

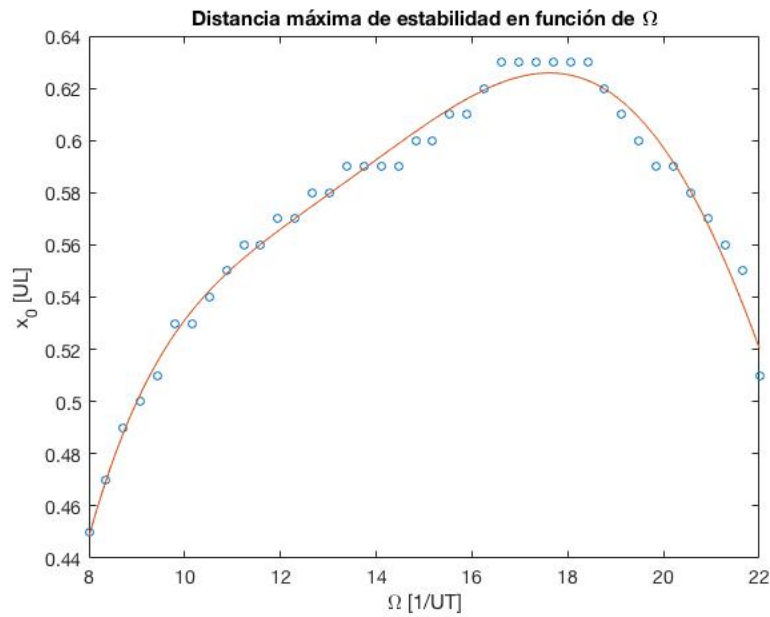


Figura 5.56 *Distancia máxima de levitación estable en función de Ω .*

Se puede apreciar que existe un máximo en torno a $\Omega = 18$ UT⁻¹ en las distancias máximas de levitación estable. A partir de ese punto, la velocidad se hace demasiado grande, por lo que a distancias más alejadas, esta tiende a sacar el dipolo de la zona de levitación debido a que el eje del dipolo es demasiado rígido para efectuar los movimientos de precesión. Por otra parte, a velocidades de giro más pequeñas la distancia máxima disminuye.

6 DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

En este capítulo se expondrán las conclusiones extraídas del análisis realizado en este trabajo, así como una discusión sobre el alcance y la validez de los resultados obtenidos en el mismo. A parte, se marcarán unas líneas futuras de trabajo para su posible estudio.

6.1 Alcance y validez de los resultados

En todo el análisis realizado en este trabajo se han despreciado los efectos de fricción con el aire. A priori la hipótesis es razonable si se supone que los experimentos se realizan en un lugar cerrado y sin viento. Sin embargo, la fricción disiparía la energía del dipolo lentamente al cabo del tiempo, por lo que su velocidad de giro se reduciría y acabaría volcando al cabo del tiempo. Otra simplificación que se ha hecho, ha sido la de considerar el imán de la peonza como un dipolo puntual con momento dipolar μ . A esto se le suma el añadido de que los experimentos realizados en [4] carecen de la precisión suficiente, debido a la dificultad para realizar medidas, por lo que se ha trabajado con el cociente μ/m , en forma del parámetro β . Esto le añade una cierta incertidumbre a la validez de los resultados numéricos extraídos, puesto que pueden no concordar de forma exacta con el sistema modelo.

6.2 Conclusiones

Tras este estudio sobre la estabilidad del Levitron[®], podemos extraer las siguientes conclusiones:

- La levitación estable solo es posible en una franja de altura muy pequeña, en unidades físicas esta se encuentra entre los 7.38 cm y 7.85 cm de altura sobre el plano medio de la base imantada, aproximadamente.
- La masa de la peonza juega un papel crucial para la levitación estable. A una masa determinada, le corresponde una altura de equilibrio (en términos de energía potencial) determinada. En torno a esta posición de equilibrio metaestable, se produce la levitación en forma de oscilaciones en las tres dimensiones.
- La velocidad de rotación propia Ω , también juega un papel fundamental. Se ha determinado en este análisis, que solo es posible una levitación estable para velocidades angulares comprendidas entre 1.9 r.p.s y 7.6 r.p.s, aproximadamente.
- A lo largo del trabajo, se han estudiado las trayectorias correspondientes a la excitación del sistema mediante sus frecuencias naturales, por medio de los modos normales. Sin embargo lograr este movimiento en un experimento sería una cuestión casi imposible, debido a la precisión requerida para lograr las condiciones iniciales correspondientes. En la realidad, el movimiento de levitación es una combinación de los cuatro modos normales.
- Por otra parte, también se puede concluir que la posición inicial de la peonza es determinante. Principalmente, y como se ha analizado, la distancia horizontal al eje del disco y la inclinación con respecto al mismo. En el desarrollo del trabajo se ha visto que la

levitación estable se produce hasta una distancia máxima de $x_0 \approx 0.6$ UL en media (lo cual depende de Ω , como se ha visto en capítulos anteriores). En unidades físicas, esto equivale a 1.5 cm de distancia, por lo que sería posible levitar la peonza siempre y cuando, a parte de darle la velocidad de giro adecuada, no la alejáramos más de esta distancia del eje de la base. A parte, la inclinación no debe superar los 6° en el centro de la base, tal y como se ha visto.

6.3 Desarrollos futuros

Tras este estudio sobre la estabilidad del Levitron[®] se plantean nuevas líneas de trabajo futuras con el objetivo de obtener resultados más precisos.

En primer lugar, se podrían considerar ciertos efectos que no se han tenido en cuenta a lo largo de este trabajo, como el rozamiento con el aire. Según la teoría analizada en este trabajo, una peonza levitando en una posición estable no se pararía nunca debido a la inexistencia de efectos disipativos de la energía. En la realidad, la fricción con el aire (o las perturbaciones) sería la causante de que la peonza acabase cayendo, por eso se propone para desarrollos futuros, el de modelar el rozamiento viscoso con el aire durante el movimiento.

Por otra parte, los resultados numéricos presentados en este trabajo, corresponden con una simplificación del campo magnético de la base imantada. Las expresiones desarrolladas en el capítulo 2 no son válidas para puntos muy alejados de la posición de equilibrio metaestable. El siguiente paso para un análisis más preciso, sería el de utilizar las expresiones completas del campo, desarrolladas también en el capítulo 2, para los cálculos numéricos. Esto supondría, sin embargo, un coste computacional mucho más elevado.

Otra limitación que tiene el análisis llevado a cabo, es el modelo de la peonza. En este trabajo, la peonza se ha modelado como un disco, por lo que la relación de inercia se ha supuesto $I_Z/I_X \approx 2$. Para trabajos posteriores, se propone la alternativa de desarrollar un modelo de CAD en tres dimensiones de la peonza y obtener el tensor de inercia exacto. A parte, en este trabajo se ha tratado la peonza como un dipolo puntual cuyo momento dipolar coincide con el eje de simetría, lo que no es estrictamente cierto. Una aproximación más precisa, sería el de considerar cierta desviación entre $\vec{\mu}$ y el eje de simetría, tal y como se sugiere en [9]. Como siguiente paso, se podría considerar una distribución continua de material diamagnético para el cálculo de las fuerzas magnéticas.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Samuel Earnshaw. (1839). *“On the nature of molecular forces which regulate the constitution of Luminiferous Ether”*.
St John’s College, Cambridge (UK).
- [2] Wikipedia. *“Magnetic Levitation”*.
Disponibile Online: https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetic_levitation
- [3] Mike & Karen Sherlock. (1999). *“The Hidden Story of the Levitron”*
Disponibile Online: <http://amasci.com/maglev/lev/expose1.html>
- [4] Daniel Fernández Núñez, Antonio de la Cruz González Fernández (2016). *“Efecto de pequeñas corrientes de aire sobre el Levitron”*
Escuela Técnica Superior de Ingeniería. Universidad de Sevilla.
- [5] Antonio de la Cruz González Fernández (2017). *“Campo magnético de dos espiras concéntricas”*
Escuela Técnica Superior de Ingeniería. Universidad de Sevilla.
- [6] Laplace. Wiki Dpto. Física Aplicada III. (2009). *“Campo magnético de una espira circular”*.
Online: http://laplace.us.es/wiki/index.php/Campo_magn%C3%A9tico_de_una_espira_circular
- [7] Martin D. Simon (1997). *“Spin stabilized magnetic levitation”*. Department of Physics.
University of California.
- [8] G. Genta, C. Delprete and D. Rondano (2000). *“Gyroscopic Stabilization of Passive Magnetic Levitation”*.
Meccanica. Kluwer Academic Publishers.

- [9] Alberto T. Pérez and Pablo García-Sánchez (2015). “*Dynamics of the Levitron under a periodic magnetic forcing*”.
American Journal of Physics 83, 133.
- [10] James Simpson, John Lane, Christopher Immer and Robert Youngsquit. “*Simple Analytic Expressions for the Magnetic Field of a Circular Current Loop*”.
Disponible Online: <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20010038494.pdf>